Information mutuelle de canaux radio et opérateurs de Jacobi ergodiques

Walid Hachem
CNRS / LIGM, Université de Marne-la-Vallée

Travail conjoint avec Adrien Hardy (Université de Lille) et Shlomo Shamai (Technion)

GRETSI 2019, Lille

Problème

$$y_n = \sum_{\ell=0}^{L} c_{n,\ell} s_{n-\ell} + v_n$$

n : temps ou espace, s_n : signal émis, y_n : signal reçu, v_n : AWGN,
$C_n = (c_{n,0}, \dots, c_{n,L})$: canal radio à $L+1$ coefficients MIMO $R \times T$.

Hypothèse générale : (C_n) processus **stationnaire ergodique**
(moyennes empiriques $\xrightarrow{\text{p.s.}}$ moyennes d'ensemble),

- Ergodicité temporelle : mobilité
- Ergodicité spatiale : généralise Wyner multicell

Information mutuelle de Shannon

L'expression de $[y_m^T, \ldots, y_n^T]^T$ pour $m \leq n$ met en jeu la matrice

$$B_{m,n} = \begin{bmatrix} c_{m,L} & \cdots & c_{m,0} & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & c_{n,L} & \cdots & c_{n,0} \end{bmatrix}.$$

Soit $\rho > 0$ le SNR. Sous des hypothèses classiques sur (s_n) et (v_n), **l'information mutuelle** par composante est

$$\mathcal{I} = \operatorname*{limps}_{n-m\to\infty} \frac{\log\det(\rho B_{m,n} B_{m,n}^* + I)}{(n-m+1)R}$$

où la limite presque sûre limps existe grâce l'ergodicité de (C_n).

Problème : Exprimer et ≪ faire parler ≫ cette limite.

Cadre théorique : opérateurs ergodiques

L'opérateur aléatoire

$$B = \begin{bmatrix} \ddots & & \ddots & & & & \\ & c_{m,L} & \cdots & c_{m,0} & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & c_{n,L} & \cdots & c_{n,0} & \\ & & & & \ddots & & \ddots \end{bmatrix}$$

sur le Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$ est **ergodique** dans le sens où le processus sur ses diagonales est ergodique.

Grâce à l'ergodicité de B, l'opérateur autoadjoint $2L+1$ diagonal BB^* possède une **densité d'états** μ : mesure de probabilité déterministe, limite des mesures spectrales des $B_{m,n}B_{m,n}^*$ quand $n - m \to \infty$.

Information mutuelle : $\mathcal{I} = \int \log(\rho\lambda + 1)\, \mu(d\lambda)$.

Exemple d'opérateur ergodique : l'opérateur de Schrödinger

Modèle d'Anderson pour l'opérateur de Schrödinger en physique quantique : la matrice de Jacobi (*i.e.*, tridiagonale) sur $\ell^2(\mathbb{Z})$

$$J = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & 1 & V_{n-1} & 1 & & \\ & & 1 & V_n & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

où (V_n) est un processus aléatoire ergodique.

Densité d'états : caractérisée à l'aide du produit d'un grand nombre de matrices successives $\Phi_n(z) = \begin{bmatrix} z - V_n & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ par la **formule de Thouless**.

Information mutuelle : approche Lévy-Zeitouni-Shamai'10

Partitionnement de B en blocs :

$$B = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \boxed{F_n} & \boxed{G_n} & \\ & & \boxed{F_{n+1}} & \boxed{G_{n+1}} \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} F_n, G_n \in \mathbb{C}^{N \times K} \\ N = RL, \; K = TL \end{array}$$

$$BB^* = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \\ F_n G_{n-1}^* & F_n F_n^* + G_n G_n^* & G_n F_{n+1}^* \\ & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$ est **bloc-Jacobi**

- **Formule de Thouless adaptée au cas bloc-Jacobi** suivant [Narula'97] et [Craig-Simon'83].
- **Expression de $\mathcal{I}$ compliquée** car liée au spectre d'un produit d'un grand nombre de matrices aléatoires structurées.

Hypothèses

Nous conservons l'écriture par blocs :

$$Y_n = F_n S_{n-1} + G_n S_n + V_n \in \mathbb{C}^N$$

- (S_n) : processus gaussien iid $\in \mathbb{C}^K$ – données numériques
- (V_n) : AWGN $\in \mathbb{C}^N$
- (F_n, G_n) : processus stationnaire ergodique, 2^{nd} moment fini – canal
- (S_n), (V_n) et (F_n, G_n) indépendants

Résultat principal

Information mutuelle :

- Il existe un processus stationnaire unique $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans les matrices hermitiennes définies positives $K \times K$ et qui satisfait la récursion

$$W_n = \psi_{(F_n, G_n)}(W_{n-1})$$

où

$$\psi_{(F,G)}(W) = \left(I + \rho\, G^* \left(I + \rho\, FWF^*\right)^{-1} G\right)^{-1}.$$

En particulier, (W_n) est ergodique.

- L'information mutuelle par composante est

$$\mathcal{I} = \frac{1}{N}\Big(\mathbb{E} \log\det\left(I + \rho\, F_0 W_{-1} F_0^*\right) - \mathbb{E}\log\det W_0\Big).$$

Résultat principal

Simulation de l'information mutuelle :

- Soit le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par la récursion

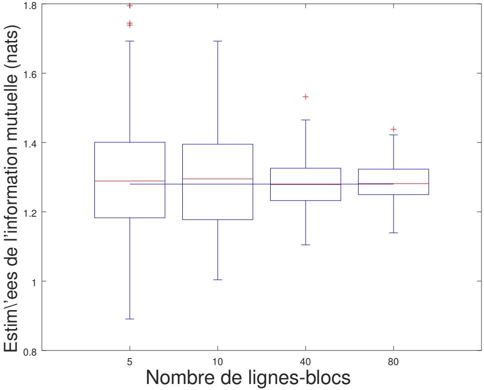
$$X_n = \psi_{(F_n, G_n)}(X_{n-1})$$

où X_{-1} est semi définie positive arbitraire. Alors

$$\mathcal{I} = \operatorname*{limps}_{n\to\infty} \frac{1}{nN} \sum_{\ell=0}^{n-1} \log\det\left(I + \rho\, F_\ell X_{\ell-1} F_\ell^*\right) - \log\det X_\ell .$$

Application : simulation de $\mathcal{I}$

Calcul **plus facile** que le calcul direct du spectre de $B_{m,n}B_{m,n}^*$



Boîtes à moustaches : estimation directe. Ligne horizontale : par le théorème principal. MIMO Rice Doppler multitrajet, $R = T = 2$, $L = 3$

Application : régime du haut SNR

Pour $\rho \to \infty$, il arrive souvent que

$$\mathcal{I} = \min(K/N, 1) \log \rho + \kappa_\infty + o_{\rho \to \infty}(1).$$

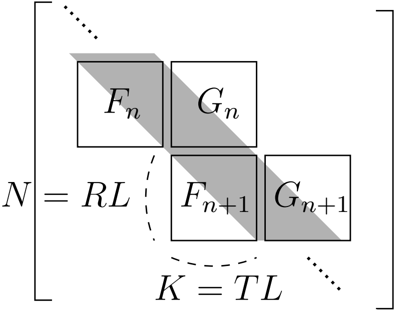
Convergence et caractérisation du décalage κ_∞ dans le cas où

- **Le processus** (F_n, G_n) **est markovien ergodique**
- $N \neq K$
- F_n et G_n de rang complet p.s. (principalement)

Application : régime des grandes dimensions

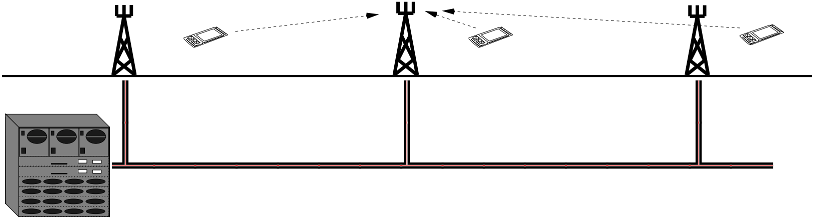
$$y_n = \sum_{\ell=0}^{L} c_{n,\ell} s_{n-\ell} + v_n$$

$$c_{n,\ell} \in \mathbb{C}^{R \times T}$$

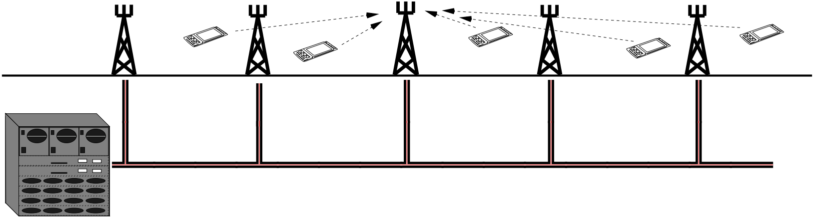


- $N, K \to \infty$ **au même rythme** : nombre d'antennes MIMO R et T $\to \infty$ au même rythme ou degré du canal $L \to \infty$.
- Pour bon nombre de modèles statistiques (F_n, G_n), $\mathcal{I}$ est suit **le régime des grandes matrices aléatoires**.
- **Preuve facile par le théorème principal.**

Exemple : réseau cellulaire de plus en plus dense

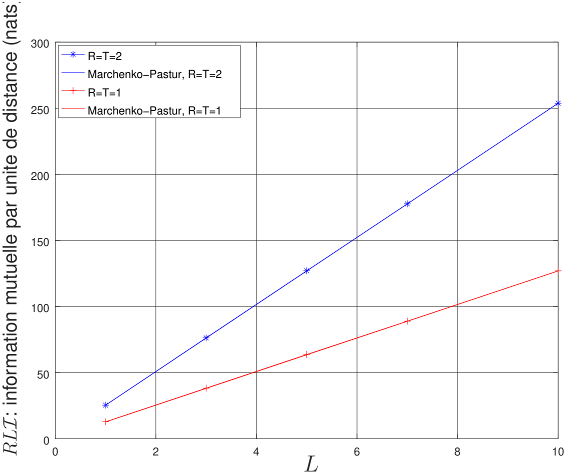


Liaison montante. SB coopèrent



SB et utilisateurs de plus en plus denses : $L \to \infty$

Exemple : réseau cellulaire de plus en plus dense



Information mutuelle par unité de distance *vs* densité des SB. Canaux Rayleigh indépendants, puissance $\propto$ distance^{-3}

Eléments de preuve

Soit la matrice semi infinie (sur $\ell^2(\mathbb{N})$)

$$H_{-\infty,n} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & \\ & F_{n-1} & G_{n-1} & \\ & & F_n & G_n \end{bmatrix}.$$

Soit le processus $W = (W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

$$W_n = [(\rho H^*_{-\infty,n} H_{-\infty,n} + I)^{-1}]_{nn},$$

(bloc $K \times K$ bas-droite de la résolvante $(\rho H^*_{-\infty,n} H_{-\infty,n} + I)^{-1}$)

- $N\mathcal{I} = \mathbb{E} \log\det\left(I_N + \rho G_0 G_0^* + \rho F_0 W_{-1} F_0^*\right)$.
- (W_n) satisfait la récursion $W_n = \psi_{(F_n,G_n)}(W_{n-1})$
- Unicité de la récursion : $\psi_{(F,G)}(\cdot)$ est une contraction pour la métrique riemannienne sur le cône des matrices hermitiennes positives

$$d(P,Q) = \left(\sum \log^2 \lambda_i\right)^{1/2}, \quad \{\lambda_i\} \text{ valeurs propres de } PQ^{-1}$$