Spectres de grandes matrices aléatoires non hermitiennes : bases et quelques applications

Walid Hachem

CNRS / LIGM, Université de Marne-la-Vallée

Journées MAS, Université de Bourgogne, août 2018

La loi circulaire

Modèles structurés et applications potentielles

Un test statistique pour un modèle non hermitien

Matrices aléatoires non hermitiennes

Problème général : Σ est une matrice aléatoire $n \times n$ non hermitienne.
Comportement pour $n \to \infty$ de la mesure spectrale

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum \delta_{\lambda_i}$$

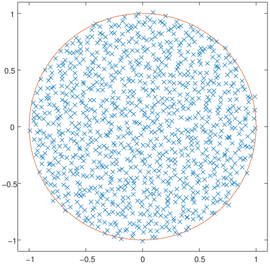
où $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ sont les valeurs propres (vap) de Σ.

Une difficulté majeure : les vap peuvent être très sensibles aux perturbations (le pseudo-spectre peut être étendu).

La loi circulaire

Le cas emblématique : $\Sigma = n^{-1/2}X$ où les éléments x_{ij} de X sont iid centrés de variance 1.

$$\boxed{\mu_n(d\lambda) \Rightarrow \mu_{\text{circ}}(d\lambda) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{|\lambda|\leq 1}d\lambda \quad \text{p.s.} \quad \text{(loi dite circulaire)}}$$



Une réalisation de vap pour $n = 1000$ et loi circulaire

Loi circulaire : bref historique

- La conjecture remonte aux années 50,
- Cas gaussien complexe : [Ginibre'65] a obtenu la densité conjointe des vap. [Mehta'67] [Silverstein] : $n \to \infty$,
  Cas gaussien réel : [Edelman'97],
- Cas général : idée de l'« **hermitisation** » :
  - Due à [Girko'84] ...
  - ... rendue rigoureuse et raffinée par [Bai'97], [Tao-Vu'08], [Pan-Zhou'10], [Götze-Tikhomirov'10]. Dans la littérature récente, idées importantes dans [Litvak *et.al.*'05], [Rudelson, Vershynin (08)], ...
    Hypothèses minimales : [Tao-Vu'10] : 2nd moment seulement.

Potentiel logarithmique et hermitisation

- **Potentiel logarithmique** d'une mes. de proba. μ à support cpct :

$$U_\mu \,:\, \mathbb{C} \to]-\infty,\infty], \quad z \mapsto \int \log|w-z|^{-1}\mu(dw).$$

  - $\mu = -(2\pi)^{-1}\Delta U$ au sens des distributions,
  - $U_{\mu_n}(z) \to_n F(z)$ p.p. sur $\mathbb{C}$ + tension $\Rightarrow F = U_\mu$ et $\mu_n \Rightarrow \mu$.
- **Idée :** montrer que $U_{\mu_n}(z) \xrightarrow{\text{p.s.}} U_{\mu_{\mathbf{circ}}}(z)$ p.p.
- **Hermitisation :**

$$\begin{aligned} U_{\mu_n}(z) &= -\frac{1}{n}\sum_1^N \log|\lambda_i - z| \\ &= -\frac{1}{n}\log|\det(\Sigma - z)| = -\frac{1}{2n}\log\det(\Sigma - z)(\Sigma - z)^* \\ &= -\int \log\lambda\,\nu_{n,z}(d\lambda) \end{aligned}$$

où $\nu_{n,z}$ est la loi empirique des **valeurs singulières (vas)** de $\Sigma - z$.

Potentiel logarithmique et hermitisation

Deux étapes :

1. Comportement asymptotique de $\nu_{n,z}$: cas particulier du modèle hermitien classique dit « information plus bruit ». $\nu_{n,z}$ converge étroitement p.s. vers une mesure ν_z pour tout $z \in \mathbb{C}$,

2. $\int \log \, d\nu_{n,z} \to \int \log \, d\nu_z$: besoin de l'**intégrabilité uniforme** de $\log \lambda$ par rapport aux $\nu_{n,z}$ (p.s. ou en probabilité).

> Singularité du log en zéro : **contrôle de la plus petite vas** de $\Sigma - z$ pour presque tout z.

Plus petite vas d'$Y = \Sigma - z$

Soit $s_1 \geq \cdots \geq s_n$ les vas d'Y.

Approche de [Rudelson-Vershynin'08] :

Théorème 1 : on suppose $\mathbb{E}|x_{11}|^3 < \infty$. Alors

$$\mathbb{P}\left[s_n \leq \varepsilon n^{-1}, \|Y\| \leq C\right] \leq C'\varepsilon + \exp(-cn).$$

Si $\mathbb{E}|x_{11}|^4 < \infty$, on sait que $\limsup_n \|Y\| \leq 3 + |z|$ p.s. [Yin *et.al.* 88] et ce **théorème assure l'intégrabilité uniforme du *log* au sens p.s.**

$\mathbb{S}^{n-1}$ = vecteurs compressibles $\cup$ incompressibles

$$s_n(Y) = \inf_{u \in \mathbb{S}^{n-\mathbf{1}}} \|Yu\|$$

$\mathbb{S}^{n-1}$ = vecteurs compressibles $\cup$ incompressibles

$$s_n(Y) = \inf_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} \|Yu\|$$
$$= \min\left(\inf_{u \in \mathrm{comp}(\theta,\rho)} \|Yu\|, \inf_{u \in \mathrm{incomp}(\theta,\rho)} \|Yu\|\right)$$

où pour $\theta \in]0,1[$ et $\rho > 0$,

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{sparse}(\theta) & = & \{ \text{ vecteurs } u \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ tels que } |\mathrm{support}(u)| \leq \theta n \} \\ \mathrm{comp}(\theta,\rho) & = & \rho\text{–voisinage de } \mathrm{sparse}(\theta) \text{ dans } \mathbb{S}^{n-1} \\ \mathrm{incomp}(\theta,\rho) & = & \mathbb{S}^{n-1} \setminus \mathrm{comp}(\theta,\rho) \end{array}$$

$\mathrm{comp}(\theta,\rho)$: vecteurs **compressibles**

$\mathrm{incomp}(\theta,\rho)$: vecteurs **incompressibles**

Les vecteurs compressibles : maillage en faible dimension

On veut prouver :

$$\exists \varepsilon_0, c > 0, \quad \mathbb{P}\left[\inf_{u \in \mathrm{comp}(\theta,\rho)} \|Yu\| \leq \varepsilon_0, \|Y\| \leq C\right] \leq \exp(-cn).$$

pour $\theta \in (0,1), \rho > 0$ bien choisis.

Démarche :

1. On peut prouver qu'$\exists$ $\varepsilon_0', c' > 0$ tels que pour tout $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ **fixe**,

$$\mathbb{P}[\|Yu\| \leq \varepsilon_0'] \sim \exp(-c'n)$$

Les vecteurs compressibles : maillage en faible dimension

2. Pour $\theta \in (0,1)$, soit $\mathcal{I} \subset [n]$ tel que $|\mathcal{I}| = \lfloor \theta n \rfloor$.
   Soit Ξ un **ρ-maillage** de l'ensemble $\mathbb{S}^{|\mathcal{I}|-1}$ des **vecteurs de $\mathbb{S}^{n-1}$ supportés par $\mathcal{I}$. On peut prendre $|\Xi| \leq (C'/\rho)^{2\theta n}$**.
   Pour tout $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ dans un ρ-voisinage $\mathbb{S}_\rho^{|\mathcal{I}|-1}$ de $\mathbb{S}^{|\mathcal{I}|-1}$, il existe $u_0 \in \Xi$ tel que $\|u - u_0\| \leq 2\rho$. Donc sur l'ensemble $\|Y\| \leq C$,

   $$\|Yu_0\| \leq \|Yu\| + \|Y\|\|u - u_0\| \leq \|Yu\| + 2C\rho.$$

   En prenant $2C\rho = \varepsilon_0'/2$, pour $\varepsilon_0 = \varepsilon_0'/2$ on a

   $$\|Yu\| \leq \varepsilon_0 \ \Rightarrow \|Yu_0\| \leq \varepsilon_0'.$$

   $$\text{Donc} \quad \mathbb{P}\left[\inf_{u \in \mathbb{S}_\rho^{|\mathcal{I}|-1}} \|Yu\| \leq \varepsilon_0, \|Y\| \leq C\right] \leq \sum_{u \in \Xi} \mathbb{P}\left[\|Yu\| \leq \varepsilon_0'\right] \leq \left(\frac{C'}{\rho}\right)^{2\theta n} \exp(-c'n).$$

3. Il reste à prendre l'union sur tous les $\mathcal{I} \subset [n]$ tels que $|\mathcal{I}| = \lfloor \theta n \rfloor$.
   Borne exponentielle si θ est suffisamment petit.

Les vecteurs incompressibles : un argument géométrique

- Pour les vecteurs incompressibles, l'argument du ρ-maillage est inefficace car la dimension est trop grande.
- Par contre, tout vecteur $u \in \text{incomp}(\theta, \rho)$ est **étalé** : il possède $\mathcal{O}(n)$ éléments de module $\mathcal{O}(n^{-1/2})$.
- Comme Yu est une combinaison linéaire de $\mathcal{O}(n)$ colonnes d'Y avec des poids $\mathcal{O}(n^{-1/2})$, on peut établir que

$$\mathbb{P}\left[\inf_{u \in \text{incomp}(\theta,\rho)} \|Yu\| \leq \rho\varepsilon n^{-1}\right] \lesssim \frac{1}{n}\sum_k \mathbb{P}\left[\text{dist}(y_k, Y_{-k}) \leq \varepsilon n^{-1/2}\right]$$

  où y_k est la $k^{\text{ième}}$ colonne d'Y et Y_{-k} est la sous-matrice constituée des autres colonnes.

Anticoncentration

- **Fonction d'anticoncentration de Lévy :** pour un vecteur aléatoire ξ et un vecteur fixe $a \in \mathbb{C}^n$,

$$\mathcal{L}_\xi(\langle a, \xi \rangle, \varepsilon) = \sup_{w \in \mathbb{C}} \mathbb{P}[|\langle a, \xi \rangle - w| \leq \varepsilon].$$

- Dans notre cas,

$$\mathrm{dist}(y_1, Y_{-1}) \geq |\langle y_1, v \rangle|$$

où $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ est un vecteur orthogonal à l'espace-colonne d'Y_{-1}.

- En écrivant $y_1 = n^{-1/2}x + ze_1$ où x est la première colonne de X, nous voulons contrôler

$$\mathbb{P}\left[\left[\mathrm{dist}(y_1, Y_{-1}) \leq \varepsilon n^{-1/2}\right] \mid Y_{-1}\right] \leq \mathcal{L}_x(\langle v, x \rangle, \varepsilon)$$

en conditionnant sur v qui est indépendant de x.

Anticoncentration par Berry-Esséen (BE)

- **BE : raffinement du théorème de la limite centrale** dans le cas de l'existence d'un 3e moment.
  Introduit en en matrices aléatoires par [Litvak *et.al.*'05].

- BE : comme les éléments de x sont iid et ont un 3e moment, pour tout $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ **incompressible**,

$$\mathcal{L}_x(\langle a, x\rangle, \varepsilon) \leq C \left(\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

- Dans notre cas, comme $Y^*_{-1} v = 0$, $v \in \text{incomp}(\theta, \rho)$ avec probabilité exponentiellement proche de 1 (1ère partie de la preuve). Donc

$$\mathbb{P}\left[\inf_{u \in \text{incomp}(\theta,\rho)} \|Yu\| \leq \varepsilon n^{-1}, \|Y\| \leq C \right] \leq C' \left(\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \exp(-cn).$$

BE : théorème 1 (plus petite vas) faible

On suppose $\mathbb{E}|x_{11}|^3 < \infty$. Alors

$$\mathbb{P}\left[s_n \leq \varepsilon n^{-1}, \, \|Y\| \leq C\right] \leq C'\varepsilon + \frac{C'}{\sqrt{n}} + \exp(-cn).$$

Si $\mathbb{E}|x_{11}|^4 < \infty$, ce théorème nous assure l'intégrabilité uniforme du *log* **en probabilité** à cause du facteur $1/\sqrt{n}$ qui ne décroît pas assez vite. On veut le remplacer par un terme exponentiel.

Anticoncentration par Littlewood-Offord

- Approche introduite en matrices aléatoires par [Friedland-Sodin'07], [Rudelson-Vershynin'08], [Tao-Vu'09].
- $\mathcal{L}_x(\langle a, x\rangle, \varepsilon)$ peut être grand si a possède une **forte structure algébrique**.
  Par exemple, si les x_{ij} sont des Bernouillis dans $\{-1, 1\}$ et si $a = [1, \ldots, 1]^\mathsf{T}$, $\mathcal{L}_x(\langle a, x\rangle, 0) = \mathcal{O}(n^{-1/2})$ car $\langle a, x\rangle \sim$ loi binômiale.
  Structure algébrique d'un a rationnel : le **plus petit commun dénominateur** des éléments de a.
- Cas général [Rud.-Ver.'08] : ***essential Least Common Denominator*** de a : pour $\alpha \in]0, 1[$ et $\kappa > 0$,
  $\mathrm{LCD}_{\alpha,\kappa}(a) =$ l'infimum des $t > 0$ tel que toutes les coordonnées de ta sauf κ d'entre elles sont à une distance $\leq \alpha$ des entiers non nuls.

Littlewood-Offord : théorème 1 fort

- Dans notre cas,

$$\mathcal{L}_x(\langle v, x\rangle, \varepsilon) \leq C\left(\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{n}\,\mathrm{LCD}}\right) + \exp(-cn).$$

  où LCD est associé au vecteur v

- On prouve qu'avec une probabilité exponentiellement proche de 1, LCD est exponentiellement grand.
  Idée : comme pour les vecteurs compressibles, les **maillages des ensembles de niveau** des LCD ont des cardinalités contrôlées.

Modèles non hermitiens : quelques voies de recherche

- Fluctuations de fonctionnelles de valeurs propres [Rider-Silverstein'06], [Rider-Virág'07], [Cébron-Kemp'15], [Benaych-Georges - Rochet'17], [O'Rourke-Renfrew'17]
- Perturbations de rang fixe [Tao'13], [O'Rourke-Renfrew'14], [Bordenave-Capitaine'16], [Ben.-Georges - Rochet'16], [Ben.-Georges - Rochet - Cébron'18]
- Support de la loi limite [Guionnet *et.al.*'11]
- Modèles plus structurés que le modèle iid [Bordenave *et.al.*'11,'12] [Aljadeff *et.al.*'15] [CHNR'17], ...
- Lois locales [Bourgade *et.al.*'14], [Yin'14], [Tao-Vu'15], [Alt *et.al.*'17]
- ...

La loi circulaire

Modèles structurés et applications potentielles

Le modèle centré à champ de variances

Un test statistique pour un modèle non hermitien

Applications des modèles non hermitiens structurés

Intérêt pour les systèmes dynamiques du type

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) + \Sigma x(t) + u(t), \quad \mu \geq 0 \quad \text{(temps continu)}$$

ou

$$x_{n+1} = \Sigma x_n + u_{n+1} \quad \text{(temps discret)}$$

où $u(t)$ ou u_n est l'« entrée » (éventuellement nulle).

La matrice Σ est une matrice aléatoire non hermitienne $n \times n$:

- Réseaux écologiques : « community matrix » (couplages entre espèces),
- Automatique : matrice d'état d'un système linéaire,
- Réseaux de neurones simplifiés : matrice de connectivité,
- ...

Stabilité du système $\Leftrightarrow$ localisation des vap de Σ.

Modèles non hermitiens structurés

- Un modèle utile serait

$$\Sigma = M + n^{-1/2} A \odot X$$

où M est déterministe, X est centrée à éléments iid et
$V = n^{-1} A \odot A$ est une matrice déterministe qui représente un « champ de variances ».
Souvent on a intérêt à étudier des champs de variance aussi creux que possible.

- Seules des instances de ce modèle ont été étudiées :
  - $A = 11^\mathsf{T}$: [Bordenave-Capitaine'16]
  - Modèle séparable $\Sigma = M + n^{-1/2} D X \widetilde{D}$: [Ahmadian *et.al.*'15]
  - $M = 0$ [CHNR'17] .

Le modèle $\Sigma = n^{-1/2} A \odot X$

- $A = \left[\sigma_{ij}\right] \succcurlyeq 0$: matrice d'adjacence d'un graphe orienté. Nous la voulons aussi « **creuse** » que possible,
- Il est naturel de la supposer **irréductible**, sinon $A \odot X$ s'écrit $\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ \star & B_{22} \end{bmatrix}$ après conjugaison par une matrice de permutation, et on se ramène à l'étude des spectres des blocs B_{11} et B_{12},
- Nous aurons besoin d'une « **robustification** » de l'hypothèse d'irréductibilité pour n grand.

Irréductibilité robuste

- **Voisinage sortant** du sommet i : $\mathcal{N}_A(i) = \{j \in [n] : \sigma_{ij} > 0\}$.
- Pour $\delta \in]0,1[$, le **voisinage sortant densément connecté** à l'ensemble $S \subset [n]$ de sommets :

$$\mathcal{N}_A^{(\delta)}(S) = \{j \in [n] : |\mathcal{N}_{A^\intercal}(j) \cap S| \geq \delta |S|\}.$$

- Pour $\sigma_0 > 0$, $\delta, \kappa \in]0,1[$, A satisfait l'hypothèse d'**irréductibilité robuste** si la matrice tronquée $A_0 = \left[\sigma_{ij} \mathbb{1}_{\sigma_{ij} \geq \sigma_0}\right]$ satisfait :
  - $\forall i \in [n],\ |\mathcal{N}_{A_0}(i)|, |\mathcal{N}_{A_0^\intercal}(i)| \geq \delta n$.
  - $\forall S \subsetneq [n]$ non vide, $|\mathcal{N}_{A_0}^{(\delta)}(S)| \geq \min(\kappa |S|, n - |S|)$.

Mesure spectrale μ_n de Σ pour n grand

Théorème 2 : si A est irréductible, pour tout $r \neq 0$, le système

$$\begin{cases} q_i &= \dfrac{[V^{\mathsf{T}} \boldsymbol{q}]_i}{r^2 + [V\tilde{\boldsymbol{q}}]_i [V^{\mathsf{T}} \boldsymbol{q}]_i} \\ \tilde{q}_i &= \dfrac{[V\tilde{\boldsymbol{q}}]_i}{r^2 + [V\tilde{\boldsymbol{q}}]_i [V^{\mathsf{T}} \boldsymbol{q}]_i} \qquad q_i, \tilde{q}_i \geq 0, \;\; i \in [n], \\ & \sum q_i = \sum \tilde{q}_i \end{cases}$$

en les vecteurs $\boldsymbol{q} = [q_1, \ldots, q_n]^{\mathsf{T}}$ et $\tilde{\boldsymbol{q}} = [\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n]^{\mathsf{T}}$ admet une unique solution $\boldsymbol{q}(r), \tilde{\boldsymbol{q}}(r)$.

Mesure spectrale μ_n de Σ pour n grand

Si $\mathbb{E}|x_{11}|^{4+\varepsilon} < \infty$ et A est robuste irréductible, il existe une suite déterministe $(\boldsymbol{\pi}_n)$ de mesures de probabilité telle que

$$\mu_n - \boldsymbol{\pi}_n \to 0 \quad \text{en probabilité.}$$

$\boldsymbol{\pi}_n$ est la mesure à symétrie radiale telle que

$$\boldsymbol{\pi}_n(\{z : |z| \leq r\}) = 1 - \frac{1}{n}\langle \boldsymbol{q}(r), V\tilde{\boldsymbol{q}}(r)\rangle.$$

support$(\boldsymbol{\pi}_n)$ est le disque fermé $\mathcal{D}(0, \sqrt{\rho(V)})$ où $\rho(V)$ est le rayon spectral de V.
$\boldsymbol{\pi}_n$ possède une densité analytique et > 0 sur $\mathcal{D}(0, \sqrt{\rho(V)}) \setminus \{0\}$.

Eléments de preuve

- Comportement à n grand du potentiel logarithmique

$$U_{\mu_n(z)} = -\int \log \lambda \, \nu_{n,z} d(\lambda)$$

  où $\nu_{n,z}$ est la loi empirque des vas de $\Sigma - z$,

- Nous cherchons une suite déterministe $(\zeta_{n,z})$ de mesures de probabilité qui approxime $(\nu_{n,z})$ au sens où $\int f d\nu_{n,z} - \int f d\zeta_{n,z} \to 0$ ps pour toute fonction continue bornée f,
- Intégrabilité uniforme de $\log \lambda$ par rapport aux $\nu_{n,z}$,
- $\boldsymbol{\pi}_n = -\frac{1}{2\pi} \Delta_z \int \log \lambda d\zeta_{n,z}$.

Eléments de preuve

- Pour identifier $\zeta_{n,z}$ on étudie la transformée de Stieltjes de $\nu_{n,z}$, qui est la trace normalisée de la résolvante

$$Q(\eta) = \left(\begin{bmatrix} & \Sigma - z \\ \Sigma^* - \bar{z} & \end{bmatrix} + \eta I_{2n} \right)^{-1}, \quad \Im \eta > 0$$

- Intégrabilité uniforme de log par rapport aux $\nu_{n,z}$:
  - **Plus petite vas** de $\Sigma - z$: [Cook'16].
  - Besoin de contrôler les **vas intermédiaires** : le nombre de vas plus petites que $n^{-\gamma}$ pour un $\gamma > 0$.
    - Pas de problème dans le cas iid si hypothèse de moment,
    - Dans notre cas, on contrôle $(2n)^{-1} \operatorname{tr} Q(\imath t)$ pour $t > 0$ proche de zéro **(*Wegner estimates*)** $\Rightarrow$ besoin de l'**irréductibilité robuste**.

La loi circulaire

Modèles structurés et applications potentielles

Un test statistique pour un modèle non hermitien
(travail en cours avec Arup Bose et Jamal Najim)

Matrices non hermitiennes et tests statistiques

La plupart des tests statistiques appliqués aux séries temporelles multivariées s'appuient sur la distribution des valeurs singulières de matrices construites à partir des observations.

L'idée est de concevoir des tests basés sur le comportement des **valeurs propres** dans le régime des grandes dimensions. La sensibilité des vap aux perturbations pourrait se révéler bénéfique.

Test de blancheur

Test sur la série temporelle observée $(y_k \in \mathbb{C}^N \,:\, k = 0, \ldots n-1)$:

$$\mathbf{H0} : y_k = x_k$$
$$\mathbf{H1} : y_k = x_k + A x_{k-1}$$

où $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ déterministe inconnue et $X = \begin{bmatrix} x_0 & \cdots & x_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N\times n}$ à éléments iid centrés.

Tests basés sur la matrice d'autocovariance à un pas :

$$\Sigma = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k y_{k-1}^* = n^{-1} Y J Y^* \quad \text{où} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

et $Y = \begin{bmatrix} y_0 & \cdots & y_{n-1} \end{bmatrix}$.

Test de blancheur

- Test classique basé sur $\operatorname{tr} \Sigma\Sigma^*$,
- Nous considérons le régime $n \to \infty$ et $N/n \to \gamma > 0$.
  Idée : établir la convergence de distribution des vap de Σ sous **H0** et concevoir un test basé sur la proximité entre cette mesure spectrale et sa valeur-limite.

Convergence de la mesure spectrale μ_n de $\Sigma = XJX^*$

Théorème 3 : On suppose $\mathbb{E}|x_{ij}|^4 < \infty$. Alors $\mu_n \Rightarrow \mu$ en probabilité, où μ est la mesure de probabilité à symétrie radiale telle que $\mu(\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}) = F(r)$ soit définie de la manière suivante. La fonction

$$g(y) = \frac{y}{y+1}(1-\gamma+2y)^2$$

est croissante sur $[0 \vee (\gamma-1), \gamma]$ et satisfait $g(0 \vee (\gamma-1)) = 0 \vee (\gamma-1)^3/\gamma$ et $g(\gamma) = \gamma(\gamma+1)$. Soit $U : [0,\infty) \to [0,1]$

$$U(x) = \begin{cases} 1-\gamma^{-1} \text{ sur } [0,(\gamma-1)^3/\gamma] \text{ si } \gamma > 1, \\ \gamma^{-1} g^{(-1)}(x) \text{ sur } [0 \vee (\gamma-1)^3/\gamma, \gamma(\gamma+1)], \\ 1 \text{ sur } [\gamma(\gamma+1), \infty[. \end{cases}$$

Alors

$$F(r) = U(r^2).$$

Propriétés de μ

- Support de la mesure de probabilité déterminée par F :
  $[0, \sqrt{\gamma(\gamma+1)}]$ si $\gamma \leq 1$ et $\{0\} \cup [(\gamma-1)^{3/2}/\sqrt{\gamma}, \sqrt{\gamma(\gamma+1)}]$ si $\gamma > 1$.
  $\Rightarrow$ support(μ) est un disque centré en zéro ou un anneau centré en zéro plus le point zéro,

- F possède une densité positive et analytique dans
  $]0 \vee \mathrm{sgn}(\gamma-1)|\gamma-1|^{3/2}/\sqrt{\gamma}, \sqrt{\gamma(\gamma+1)}[$.

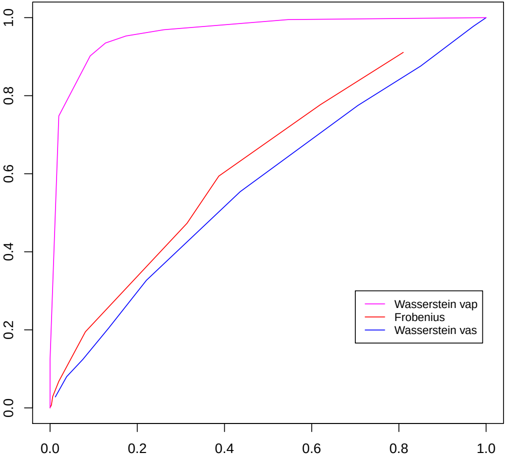
Quelques éléments de preuve

- Partie importante de la preuve : contrôle de la plus petite vas de $XJX^* - z$.
  Nous le faisons dans le cadre plus général de $XCX^* - z$ où $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est déterministe inversible.

- $\|(XCX^* - z)^{-1}\| \leq \left\|H^{-1}\right\|$ où $H = \begin{bmatrix} z & X \\ X^* & C^{-1} \end{bmatrix}$
  (complément de Schur de C^{-1} dans H).

- On contrôle la plus petite vas de H en suivant les idées de [Vershynin'14] qui traite du cas où H est une matrice symétrique à éléments iid au dessus de la diagonale.

Une simulation préliminaire



Courbes COR

Test basé sur les distances de Wasserstein

$N = 50$, $n = 100$, A diagonale avec $\|A\|_{\text{fro}}^2 / N = 0.003$