

Structures géométriques triangulées

projet ANR

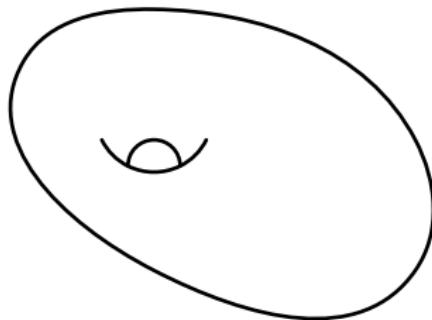
Bergeron, Deraux, Falbel, Guilloux, Koseleff, Rouillier

Institut des mathématiques de Jussieu
27-11-2014

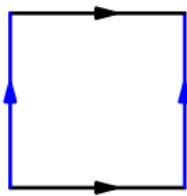
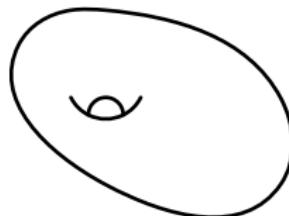
| Zero-dimensional prime components | | | | | | | | |
|-----------------------------------|-----|--------------------|------------|------------|------------|------------|------------|---|
| Number(s) of Solutions | | | | | | | | |
| Name | 1-D | Ext. Degrees | $PGL_3(C)$ | $PSL_3(R)$ | $PSL_2(C)$ | $PSL_2(R)$ | $PU(2, 1)$ | Volumes |
| m003 | 2 | 2, 2, 8, 8 | | 20 | 0 | 2 | 0 | 2 0.648847 2.029883 |
| m004 | 0 | 2, 2, 2, 2 | | 8 | 0 | 2 | 0 | 6 2.029883 |
| m006 | 2 | 6, 6, 12, 28 | | 43 | 1 | 3 | 1 | 15 0.707031 0.719829 0.971648 1.284485 2.568971 |
| m007 | 0 | 3, 6, 8, 8, 8 | | 33 | 1 | 3 | 1 | 15 0.707031 0.822744 1.336688 2.568971 |
| m009 | 0 | 2, 4, 4, 4, 6, 8 | | 28 | 2 | 2 | 0 | 8 0.507471 0.791583 1.417971 2.666745 |
| m010 | 2 | 2, 6, 6, 12, 12 | | 38 | 0 | 2 | 0 | 4 0.251617 0.791583 0.809805 0.982389 1.323430 2.666745 |
| m011 | 1 | 3, 4, 16, 64 | | 87 | 5 | 7 | 3 | 21 0.226838 0.251809 0.328272 0.397457 0.452710 0.643302 0.685598 0.700395 0.724553 0.770297 0.879768 0.942707 0.988006 1.099133 1.184650 1.846570 2.781834 |
| m015 | 0 | 3, 4, 4, 6, 6 | | 23 | 3 | 3 | 1 | 11 0.794323 1.583167 2.828122 |
| m016 | 1 | 3, 3, 10, 50 | | 66 | 4 | 6 | 4 | 24 0.296355 0.403707 0.710033 0.753403 0.773505 0.796590 0.886451 1.135560 1.422985 1.505989 2.828122 |
| m017 | 3 | 3, 4, 6, 6, 44 | | 63 | 1 | 3 | 1 | 21 0.527032 0.794323 0.801984 0.828705 1.252969 1.588647 2.828122 |
| m019 | 1 | 4, 4, 22, 84 | | 114 | 6 | 8 | 4 | 24 0.027351 0.062112 0.323395 0.332856 0.347159 0.411244 0.467624 0.524801 0.544151 0.599455 0.638404 0.738805 0.758111 0.798098 0.851139 0.916588 1.101800 1.130263 1.190919 1.263709 1.340255 2.111776 2.944106 |
| Wh. link | 0 | 2, 2, 4, 4, 10, 10 | | 32 | 0 | 2 | 0 | 14 1.132196 1.683102 3.663862 |

Le tore

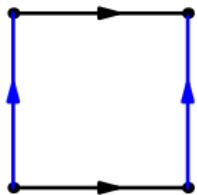
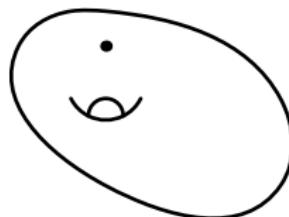
Le tore



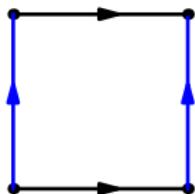
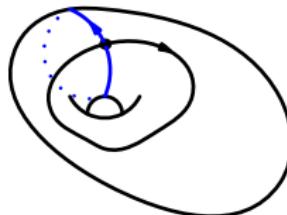
Le tore



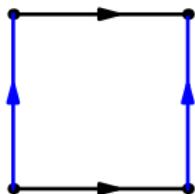
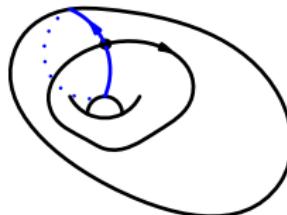
Le tore



Le tore



Le tore



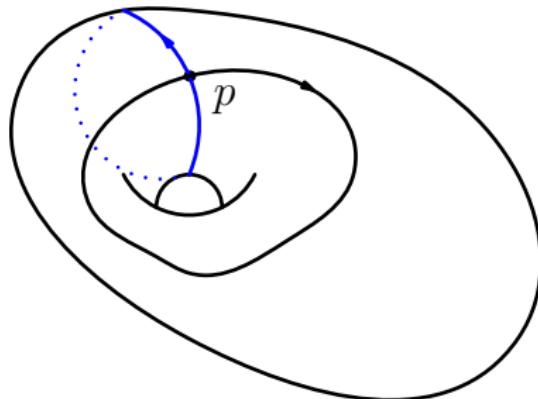
Definition

Le groupe fondamental $\pi_1(M, p)$ d'un espace M basé sur un point $p \in M$ est le groupe (opération de concaténation) des lacets commencent en p définie à homotopie près.

Definition

Le groupe fondamental $\pi_1(M, p)$ d'un espace M basé sur un point $p \in M$ est le groupe (opération de concaténation) des lacets commencent en p définie à homotopie près.

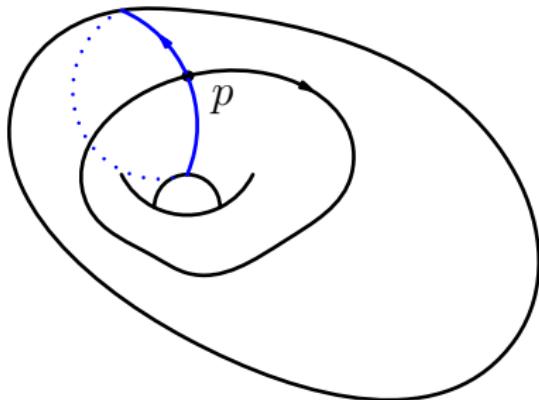
Exemple : le tore $M = \Sigma_1$



Definition

Le groupe fondamental $\pi_1(M, p)$ d'un espace M basé sur un point $p \in M$ est le groupe (opération de concaténation) des lacets commencent en p définie à homotopie près.

Exemple : le tore $M = \Sigma_1$



$$\pi_1(T^2, p) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a, b \rangle$$

Definition

Une représentation du groupe fondamental $\pi_1(M, p)$ dans un groupe G est un homomorphisme

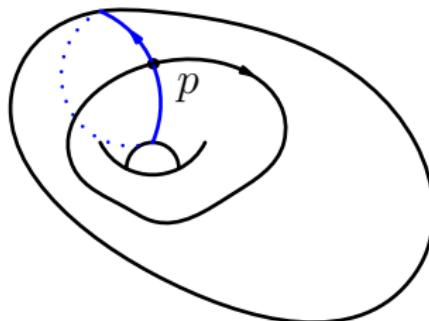
$$\rho : \pi_1(M, p) \rightarrow G$$

Definition

Une représentation du groupe fondamental $\pi_1(M, p)$ dans un groupe G est un homomorphisme

$$\rho : \pi_1(M, p) \rightarrow G$$

Exemple : le tore $M = \Sigma_1$

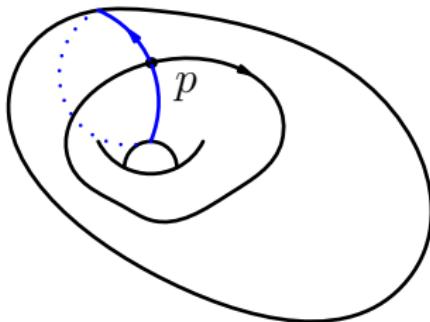


Definition

Une représentation du groupe fondamental $\pi_1(M, p)$ dans un groupe G est un homomorphisme

$$\rho : \pi_1(M, p) \rightarrow G$$

Exemple : le tore $M = \Sigma_1$



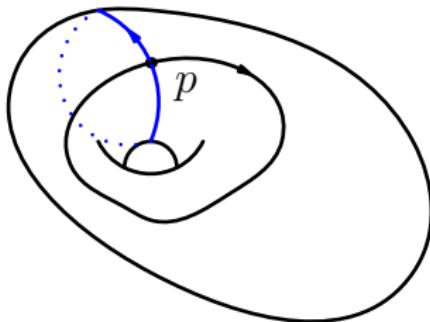
Soit $G = \{\text{translations du plan}\} = \mathbb{R}^2$

Definition

Une représentation du groupe fondamental $\pi_1(M, p)$ dans un groupe G est un homomorphisme

$$\rho : \pi_1(M, p) \rightarrow G$$

Exemple : le tore $M = \Sigma_1$



Soit $G = \{\text{translations du plan}\} = \mathbb{R}^2$

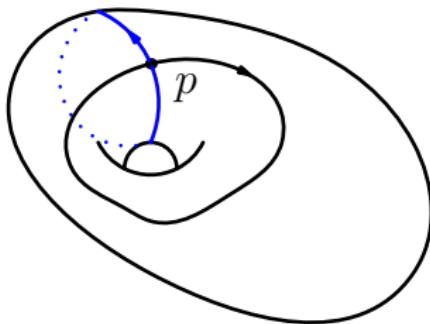
$$\rho : \pi_1(\Sigma_1, p) \rightarrow G$$

Definition

Une représentation du groupe fondamental $\pi_1(M, p)$ dans un groupe G est un homomorphisme

$$\rho : \pi_1(M, p) \rightarrow G$$

Exemple : le tore $M = \Sigma_1$



Soit $G = \{\text{translations du plan}\} = \mathbb{R}^2$

$$\rho : \pi_1(\Sigma_1, p) \rightarrow G$$

est définie par le choix de deux vecteurs $\rho(a)$ and $\rho(b)$.

La donnée d'une représentation

$$\rho : \pi_1(\Sigma_1, p) \rightarrow G = \{\text{translations du plan}\}$$

La donnée d'une représentation

$$\rho : \pi_1(\Sigma_1, p) \rightarrow G = \{\text{translations du plan}\}$$

qui est FIDELE et don't l'image est un sous-groupe DISCRET

La donnée d'une représentation

$$\rho : \pi_1(\Sigma_1, p) \rightarrow G = \{\text{translations du plan}\}$$

qui est FIDELE et don't l'image est un sous-groupe DISCRET définit une structure euclidienne sur le tore :

La donnée d'une représentation

$$\rho : \pi_1(\Sigma_1, p) \rightarrow G = \{\text{translations du plan}\}$$

qui est FIDELE et don't l'image est un sous-groupe DISCRET définit une structure euclidienne sur le tore :

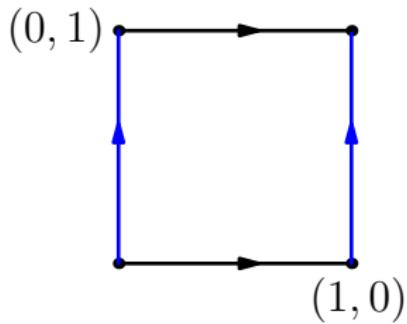
$$\mathbb{R}^2 / \langle \rho(a), \rho(b) \rangle$$

La donnée d'une représentation

$$\rho : \pi_1(\Sigma_1, p) \rightarrow G = \{\text{translations du plan}\}$$

qui est FIDELE et don't l'image est un sous-groupe DISCRET définit une structure euclidienne sur le tore :

$$\mathbb{R}^2 / \langle \rho(a), \rho(b) \rangle$$

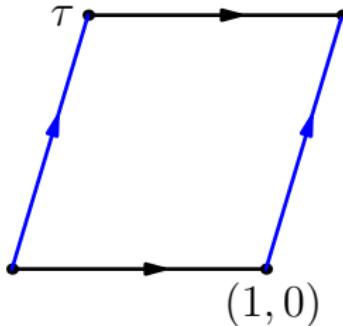


La donnée d'une représentation

$$\rho : \pi_1(\Sigma_1, p) \rightarrow G = \{\text{translations du plan}\}$$

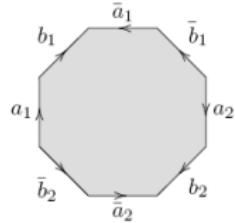
qui est FIDELE et dont l'image est un sous-groupe DISCRET définit une structure euclidienne sur le tore :

$$\mathbb{R}^2 / \langle \rho(a), \rho(b) \rangle$$

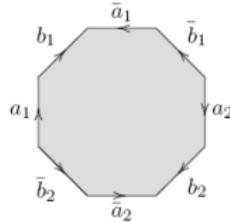


genre supérieur

genre supérieur

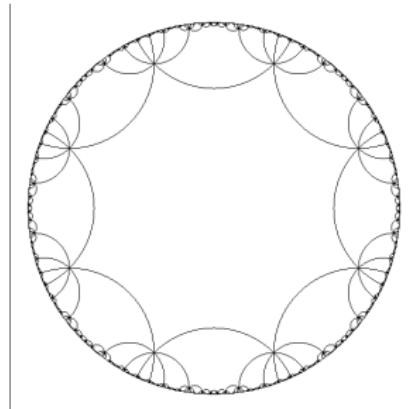
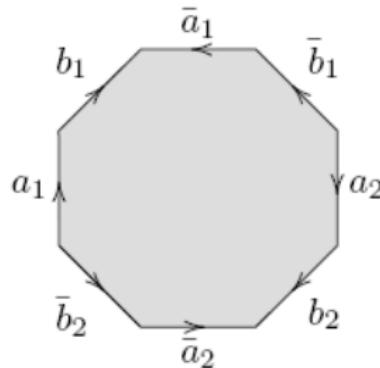


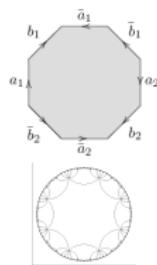
genre supérieur

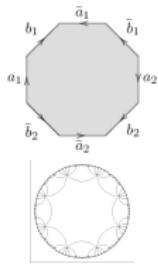


Théorème

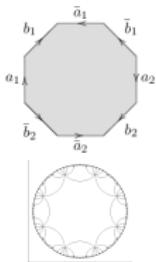
Toute classe de métriques conformes sur une surface compacte orientable de genre ≥ 2 possède une métrique de courbure constante négative.







$G = PU(1, 1)$ est le groupe d'isométries qui préservent l'orientation du disque unitaire Δ avec la métrique de courbure constante négative -1 .

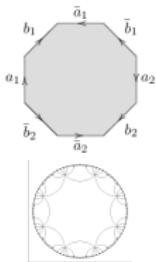


$G = PU(1, 1)$ est le groupe d'isométries qui préservent l'orientation du disque unitaire Δ avec la métrique de courbure constante négative -1 .

Théorème

Pour toute métrique de courbure constante négative sur une surface Σ_g , il existe une représentation $\rho : \pi_1(\Sigma_g, p) \rightarrow G$ fidèle et discrète telle que la surface est isométrique à

$$\Delta / \rho(\pi_1(\Sigma_g, p)).$$



$G = PU(1, 1)$ est le groupe d'isométries qui préservent l'orientation du disque unitaire Δ avec la métrique de courbure constante négative -1 .

Théorème

Pour toute métrique de courbure constante négative sur une surface Σ_g , il existe une représentation $\rho : \pi_1(\Sigma_g, p) \rightarrow G$ fidèle et discrète telle que la surface est isométrique à

$$\Delta / \rho(\pi_1(\Sigma_g, p)).$$

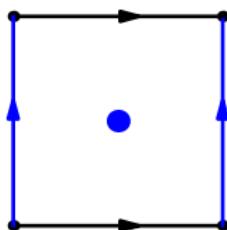
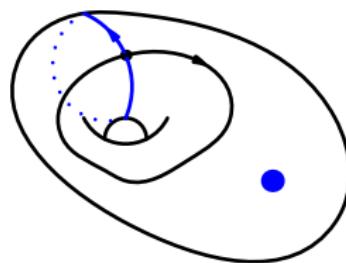
Remarque : metrics (à courbure constante) à isometries près correspondent à représentations à conjugaisons près.

Le tore épointé

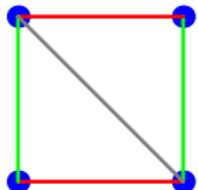
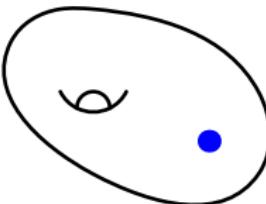
$$\pi_1(\text{tore épointé}, p) = \langle a, b, c | [a, b] = c \rangle$$

Le tore épointé

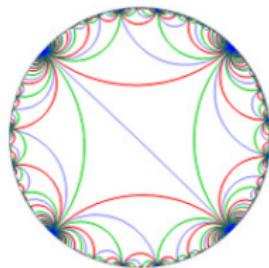
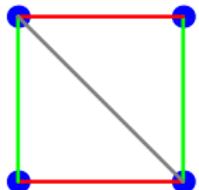
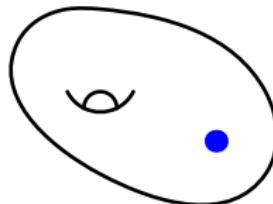
$$\pi_1(\text{tore épointé}, p) = \langle a, b, c | [a, b] = c \rangle$$



Triangulations idéales



Triangulations idéales



Il existe une une représentation fidèle et discrète

$$\rho : \pi_1(\text{tore épointé}, p) \rightarrow \text{PU}(1, 1) \text{ (transformations de Möbius)}$$

Il existe une une représentation fidèle et discrète

$\rho : \pi_1(\text{tore époussé}, p) \rightarrow \text{PU}(1, 1)$ (transformations de Möbius)

telle que

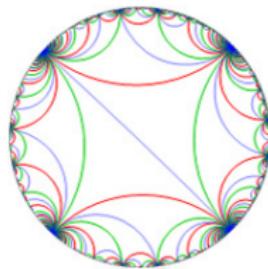
$$\text{tore époussé} = \Delta / \text{Im}(\rho)$$

Il existe une une représentation fidèle et discrète

$$\rho : \pi_1(\text{tore époussé}, p) \rightarrow \text{PU}(1, 1) \text{ (transformations de Möbius)}$$

telle que

$$\text{tore époussé} = \Delta / \text{Im}(\rho)$$

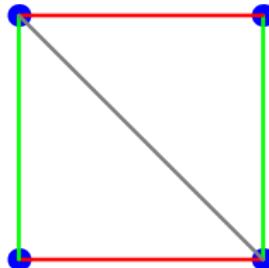
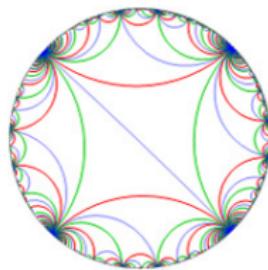


Il existe une une représentation fidèle et discrète

$$\rho : \pi_1(\text{tore époussé}, p) \rightarrow \text{PU}(1, 1) \text{ (transformations de Möbius)}$$

telle que

$$\text{tore époussé} = \Delta / \text{Im}(\rho)$$



En utilisant le plan de Poincaré :

$$\rho : \pi_1(\text{tore époussé}, p) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) (\text{isomorphe à } PU(1, 1))$$

En utilisant le plan de Poincaré :

$$\rho : \pi_1(\text{tore époussé}, p) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) (\text{isomorphe à } PU(1, 1))$$

telle que

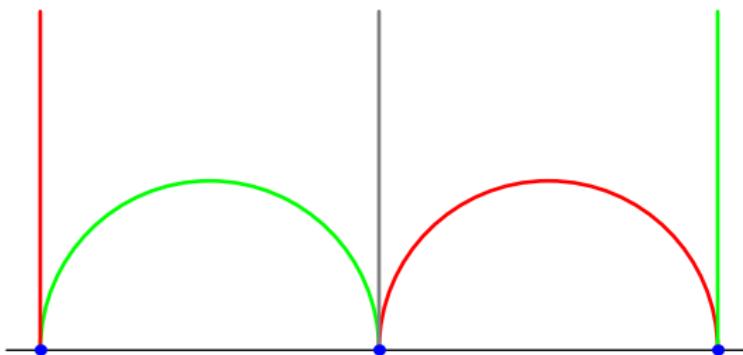
$$\text{tore époussé} = \Delta / Im(\rho)$$

En utilisant le plan de Poincaré :

$$\rho : \pi_1(\text{tore époussé}, p) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) (\text{isomorphe à } PU(1, 1))$$

telle que

$$\text{tore époussé} = \Delta / Im(\rho)$$

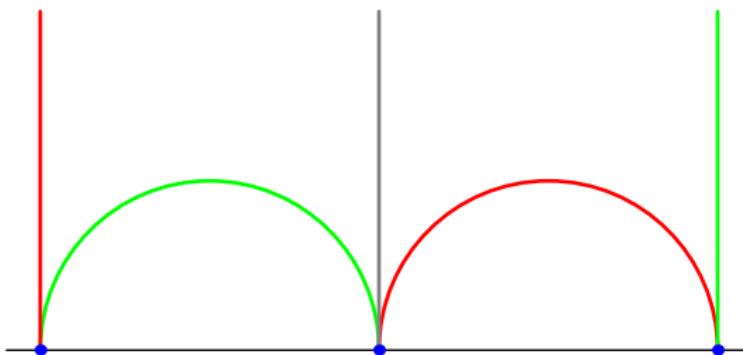


En utilisant le plan de Poincaré :

$$\rho : \pi_1(\text{tore époussé}, p) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) (\text{isomorphe à } PU(1, 1))$$

telle que

$$\text{tore époussé} = \Delta / Im(\rho)$$



Groupe de Lie G agissant transitivement sur une 3-variété X .

Groupe de Lie G agissant transitivement sur une 3-variété X .
 M une 3-variété, (X, G) -structure sur M :

$$M = \bigcup_i U_i$$

Groupe de Lie G agissant transitivement sur une 3-variété X .
 M une 3-variété, (X, G) -structure sur M :

$$M = \bigcup_i U_i$$

$$\phi_i : U_i \rightarrow X$$

Groupe de Lie G agissant transitivement sur une 3-variété X .
 M une 3-variété, (X, G) -structure sur M :

$$M = \bigcup_i U_i$$

$$\phi_i : U_i \rightarrow X$$

$$\phi_j = g_{ji} \circ \phi_i, \quad \text{avec} \quad g_{ji} \in G$$

Groupe de Lie G agissant transitivement sur une 3-variété X .
 M une 3-variété, (X, G) -structure sur M :

$$M = \bigcup_i U_i$$

$$\phi_i : U_i \rightarrow X$$

$$\phi_j = g_{ji} \circ \phi_i, \quad \text{avec} \quad g_{ji} \in G$$

- représentation (holonomie)

$$\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$$

Groupe de Lie G agissant transitivement sur une 3-variété X .
 M une 3-variété, (X, G) -structure sur M :

$$M = \bigcup_i U_i$$

$$\phi_i : U_i \rightarrow X$$

$$\phi_j = g_{ji} \circ \phi_i, \quad \text{avec} \quad g_{ji} \in G$$

- représentation (holonomie)

$$\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$$

Definition Une (G, X) -structure sur M est *uniformisable* si

$$M = U/\Gamma$$

Definition Une (G, X) -structure sur M est *uniformisable* si

$$M = U/\Gamma$$

pour $\Gamma \subset G$ agissant proprement discontinument sur un ouvert $U \subset X$.

Definition Une (G, X) -structure sur M est *uniformisable* si

$$M = U/\Gamma$$

pour $\Gamma \subset G$ agissant proprement discontinument sur un ouvert $U \subset X$.

Exemples :

- **Structures hyperboliques**

$$(\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}), \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3)$$

Definition Une (G, X) -structure sur M est *uniformisable* si

$$M = U/\Gamma$$

pour $\Gamma \subset G$ agissant proprement discontinument sur un ouvert $U \subset X$.

Exemples :

- **Structures hyperboliques**

$$(\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}), \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3)$$

- **Structures conformes**

$$(\mathrm{SO}(4, 1), S^3)$$

Definition Une (G, X) -structure sur M est *uniformisable* si

$$M = U/\Gamma$$

pour $\Gamma \subset G$ agissant proprement discontinument sur un ouvert $U \subset X$.

Exemples :

- **Structures hyperboliques**

$$(\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}), \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3)$$

- **Structures conformes**

$$(\mathrm{SO}(4, 1), S^3)$$

- **Structures projectives réels**

$$(\mathrm{PGL}(4, \mathbb{R}), \mathbb{RP}^3)$$

Fixons (G, X)

Fixons (G, X)

Décrire les (G, X) structures sur une variété M .

Fixons (G, X)

Décrire les (G, X) structures sur une variété M .

plus généralement,

Fixons (G, X)

Décrire les (G, X) structures sur une variété M .

plus généralement,

Décrire les représentations $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$.

Fixons (G, X)

Décrire les (G, X) structures sur une variété M .

plus généralement,

Décrire les représentations $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$.

La conjecture de géométrisation de Thurston :
(un long processus finalisé par Perelman)

Fixons (G, X)

Décrire les (G, X) structures sur une variété M .

plus généralement,

Décrire les représentations $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$.

La conjecture de géométrisation de Thurston :
(un long processus finalisé par Perelman)

Théorème

Toute variété de dimension 3 peut être découpée en composantes qui sont des structures géométriques (une des 8 structures riemannniennes dites des Thurston) uniformisables.

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$$

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$$

Que peut-on dire de

$$G = \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})?$$

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$$

Que peut-on dire de

$$G = \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})?$$

$$\dim(G)_{\mathbb{C}} = 8$$

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$$

Que peut-on dire de

$$G = \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})?$$

$$\dim(G)_{\mathbb{C}} = 8$$

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$$

Que peut-on dire de

$$G = \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})?$$

$$\dim(G)_{\mathbb{C}} = 8$$

- $\mathrm{PU}(3)$

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$$

Que peut-on dire de

$$G = \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})?$$

$$\dim(G)_{\mathbb{C}} = 8$$

- $\mathrm{PU}(3)$
- $\mathrm{PU}(2, 1)$ Structures de Cauchy-Riemann

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$$

Que peut-on dire de

$$G = \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})?$$

$$\dim(G)_{\mathbb{C}} = 8$$

- $\mathrm{PU}(3)$
- $\mathrm{PU}(2, 1)$ Structures de Cauchy-Riemann
- $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ Structures de drapeaux réels

Structures CR

$$(\mathbb{S}^3, \mathrm{PU}(2, 1))$$

Structures CR

$$(\mathbb{S}^3, \mathrm{PU}(2, 1))$$

$\mathrm{PU}(2, 1)$ est le groupe de biholomorphismes de la boule complexe de dimension 2

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$$

qui agit aussi sur son bord identifié à \mathbb{S}^3 .

$\mathrm{PU}(2, 1)$ agit par isometries biholomorphes sur l'espace hyperbolique complexe et par transformations CR sur \mathbb{S}^3

Structures des drapeaux

$$(X, \mathrm{SL}(3, \mathbb{R}))$$

Structures des drapeaux

$$(X, \mathrm{SL}(3, \mathbb{R}))$$

ou X est l'ensemble des drapeaux de RP^2 , i.e.

$$[p, l] \in \mathrm{RP}^2 \times \mathrm{RP}^{2*}$$

ou $p \in \mathrm{RP}^2$ et l une droite contenant p .

Structures des drapeaux

$$(X, \mathrm{SL}(3, \mathbb{R}))$$

ou X est l'ensemble des drapeaux de RP^2 , i.e.

$$[p, l] \in \mathrm{RP}^2 \times \mathrm{RP}^{2*}$$

ou $p \in \mathrm{RP}^2$ et l une droite contenant p .

$$X = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/B$$

ou B = groupe de Borel = matrices triangulaires supérieurs.

Structures des drapeaux

$$(X, \mathrm{SL}(3, \mathbb{R}))$$

ou X est l'ensemble des drapeaux de \mathbb{RP}^2 , i.e.

$$[p, l] \in \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^{2*}$$

ou $p \in \mathbb{RP}^2$ et l une droite contenant p .

$$X = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/B$$

ou B = groupe de Borel = matrices triangulaires supérieurs.
 X est identifié au projectivisé du fibré tangent de \mathbb{RP}^2 .

$$\mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^2$$

$$\mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^2$$

$$\mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^2$$

$$S^3 \longrightarrow \mathbb{CP}^2$$

$$\mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^2$$

$$S^3 \longrightarrow \mathbb{CP}^2$$

définissent des applications dans l'espace des drapeaux dans \mathbb{CP}^2 .

Drapeaux dans \mathbb{CP}^2

$$\mathcal{F} = \{ ([x], [f]) \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^3) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3^*}) \mid f(x) = 0 \}.$$

Drapeaux dans \mathbb{CP}^2

$$\mathcal{F} = \{ ([x], [f]) \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^3) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3^*}) \mid f(x) = 0 \}.$$

$\text{SL}(3, \mathbb{C})$ agit sur \mathcal{F} par

$$g \cdot ([x], [f]) = ([g \cdot x], [g^{-1}{}^T \cdot f])$$

$$\mathcal{F} = \text{SL}(3, \mathbb{C}) / B$$

Drapeaux dans \mathbb{CP}^2

$$\mathcal{F} = \{ ([x], [f]) \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^3) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3^*}) \mid f(x) = 0 \}.$$

$\text{SL}(3, \mathbb{C})$ agit sur \mathcal{F} par

$$g \cdot ([x], [f]) = ([g \cdot x], [g^{-1}{}^T \cdot f])$$

$$\mathcal{F} = \text{SL}(3, \mathbb{C}) / B$$

- L'action de $SL(3, \mathbb{C})$ est transitive sur les paires de drapeaux génériques

- L'action de $SL(3, \mathbb{C})$ est transitive sur les paires de drapeaux génériques
- Une configuration générique de 3 drapeaux $([x_i], [f_i])_{1 \leq i \leq 3}$ est paramétrée (à l'action de $PGL(3, \mathbb{C})$ près) par le trirapport :

$$X = \frac{f_1(x_2)f_2(x_3)f_3(x_1)}{f_1(x_3)f_2(x_1)f_3(x_2)} \in \mathbb{C}^\times$$

Une configuration générique de 4 drapeaux $([x_i], [f_i])_{1 \leq i \leq 4}$ est paramétrée (à l'action de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ près) par $(\mathbb{C} - \{0, 1\})^4$

Une configuration générique de 4 drapeaux $([x_i], [f_i])_{1 \leq i \leq 4}$ est paramétrée (à l'action de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ près) par $(\mathbb{C} - \{0, 1\})^4$
coordonnées

Une configuration générique de 4 drapeaux $([x_i], [f_i])_{1 \leq i \leq 4}$ est paramétrée (à l'action de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ près) par $(\mathbb{C} - \{0, 1\})^4$

coordonnées

$$z_{ij} := X(\ker(f_i), (x_i x_j), (x_i x_k), (x_i x_l)).$$

Une configuration générique de 4 drapeaux $([x_i], [f_i])_{1 \leq i \leq 4}$ est paramétrée (à l'action de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ près) par $(\mathbb{C} - \{0, 1\})^4$ coordonnées

$$z_{ij} := X(\ker(f_i), (x_i x_j), (x_i x_k), (x_i x_l)).$$

birapport de 4 points dans \mathbb{CP}^1 :

Une configuration générique de 4 drapeaux $([x_i], [f_i])_{1 \leq i \leq 4}$ est paramétrée (à l'action de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ près) par $(\mathbb{C} - \{0, 1\})^4$ coordonnées

$$z_{ij} := X(\ker(f_i), (x_i x_j), (x_i x_k), (x_i x_l)).$$

birapport de 4 points dans \mathbb{CP}^1 :

$$X(x_1, x_2, x_3, x_4) := \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)}$$

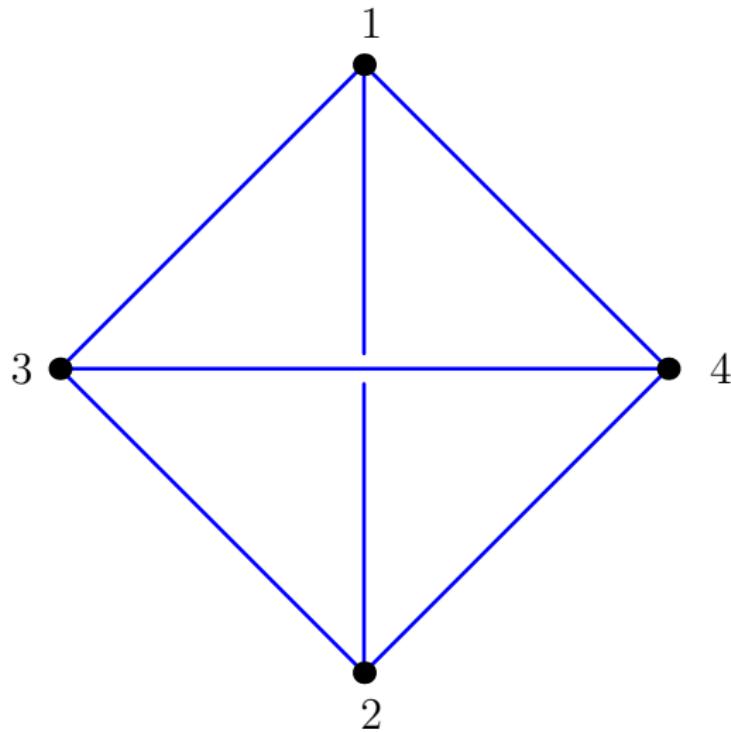
1

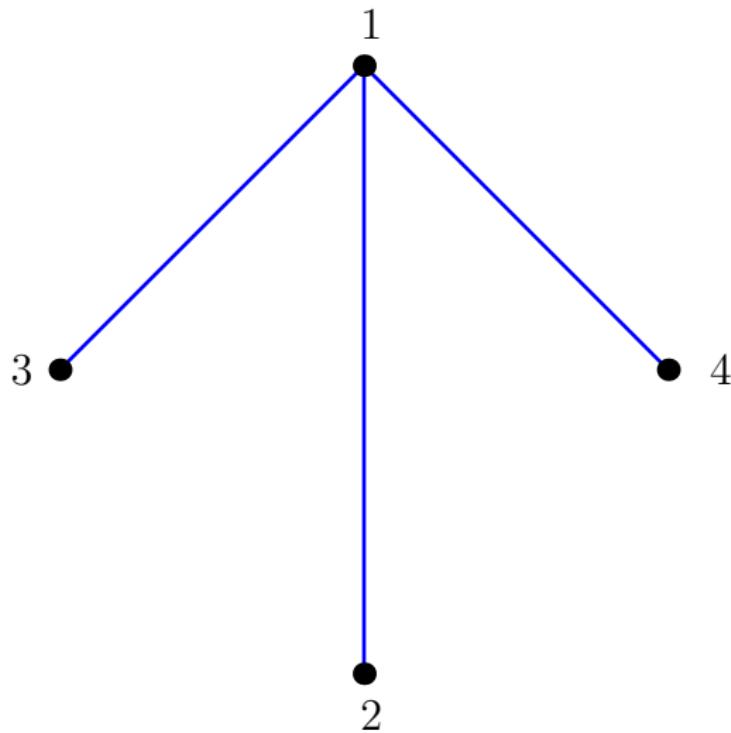


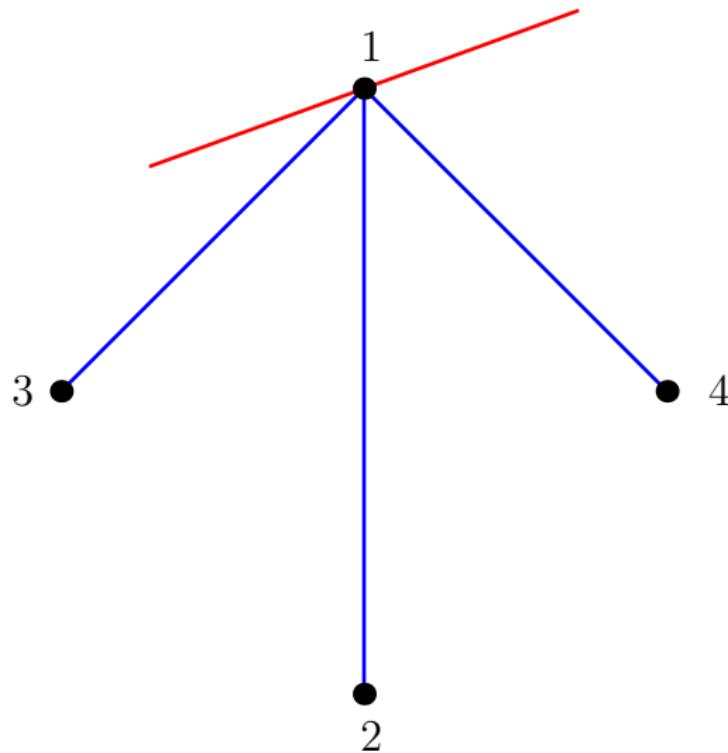
3 •

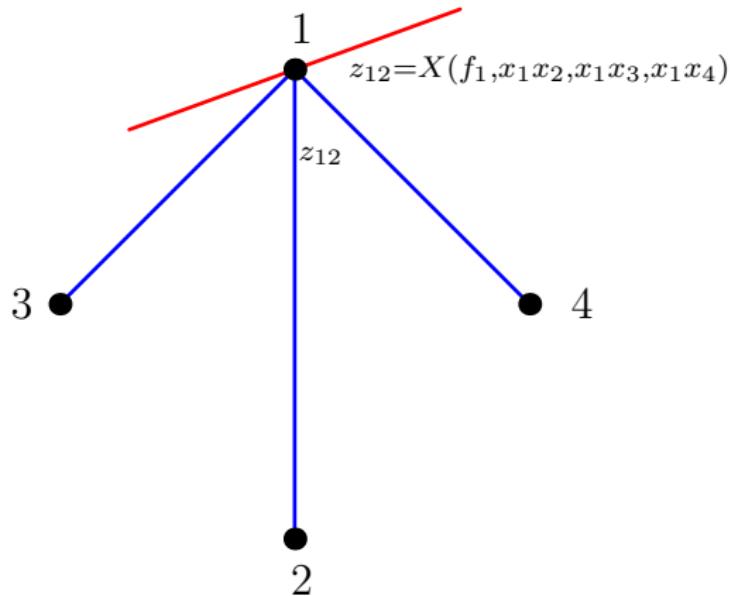
• 4

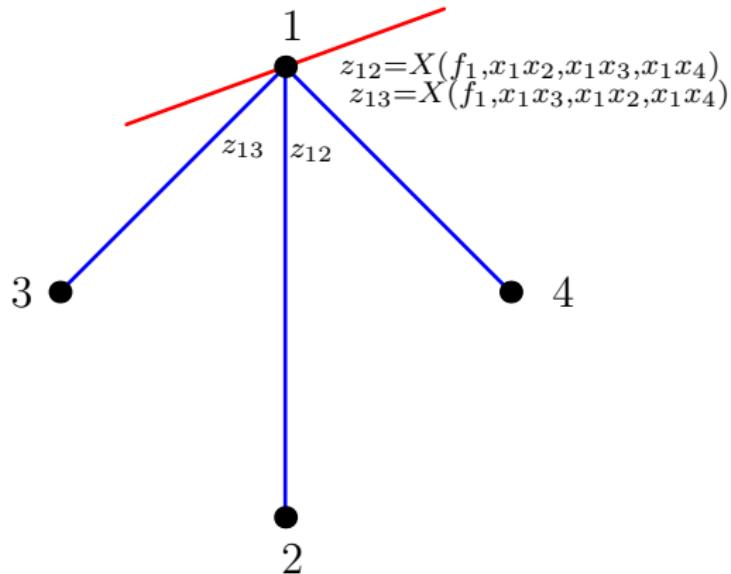
•
2

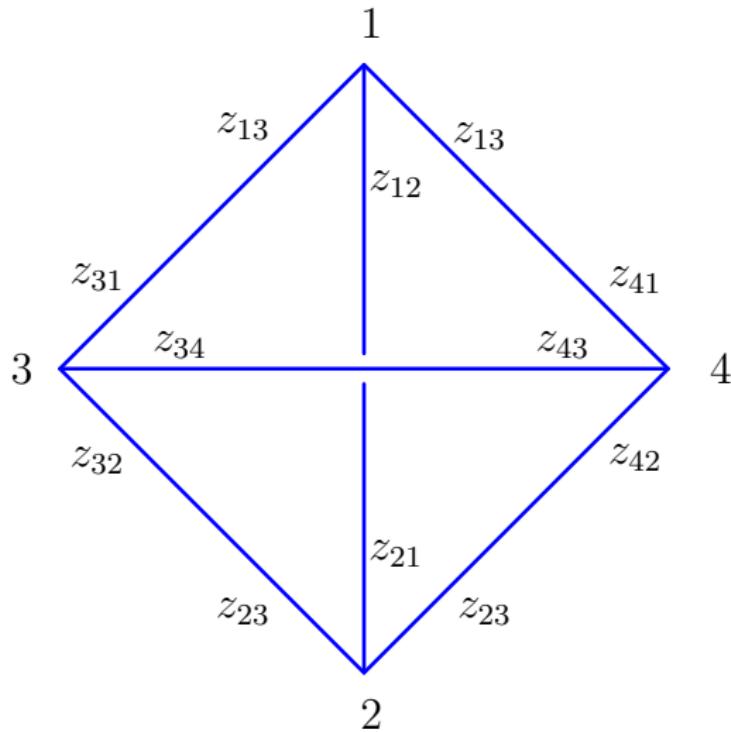












$$z_{13} = \frac{1}{1 - z_{12}}$$

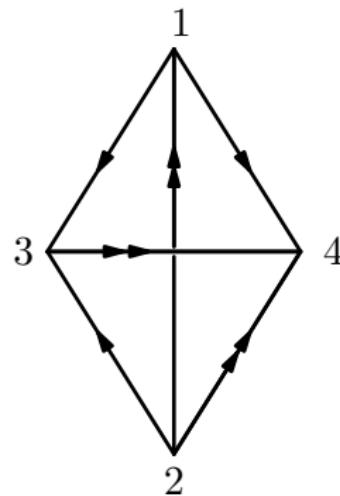
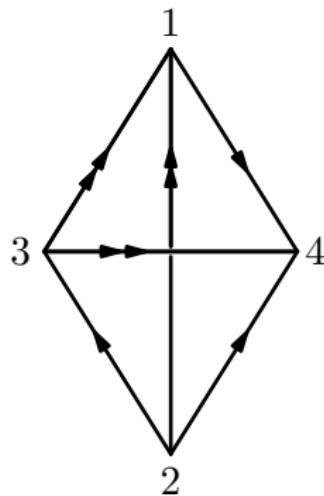
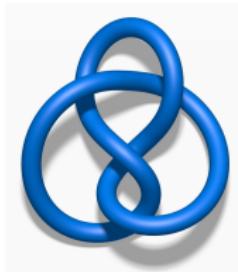
$$z_{14} = 1 - \frac{1}{z_{12}}.$$

$$z_{12}z_{13}z_{14} = -1$$

Un calcul montre que le tri-rapport de $[x_1, f_1], [x_2, f_2], [x_3, f_3]$ est

$$z_{123} := -z_{14}z_{24}z_{34}.$$

Triangulations idéales



$$M = \bigcup_{\nu} truncated(T_{\nu})$$

$$M = \bigcup_{\nu} \text{truncated}(T_\nu)$$

Le bord de M est triangulé par des triangles.

$$M = \bigcup_{\nu} \text{truncated}(T_\nu)$$

Le bord de M est triangulé par des triangles.

Décoration :

la donnée d'un drapeaux à chaque sommet des tétraèdres T_ν , compatibles avec les recollements (+ condition de généricté sur les drapeaux) .

$$M = \bigcup_{\nu} \text{truncated}(T_\nu)$$

Le bord de M est triangulé par des triangles.

Décoration :

la donnée d'un drapeau à chaque sommet des tétraèdres T_ν , compatibles avec les recollements (+ condition de généricté sur les drapeaux) .

Holonomie

$$\rho : \pi_1(M, p_0) \rightarrow \text{PGL}(3, \mathbb{C}).$$

$$M = \bigcup_{\nu} \text{truncated}(T_\nu)$$

Le bord de M est triangulé par des triangles.

Décoration :

la donnée d'un drapeaux à chaque sommet des tétraèdres T_ν , compatibles avec les recollements (+ condition de généricté sur les drapeaux) .

Holonomie

$$\rho : \pi_1(M, p_0) \rightarrow \text{PGL}(3, \mathbb{C}).$$

Holonomie du bord

$$\rho : \pi_1(\partial M, p) \rightarrow \text{PGL}(3, \mathbb{C}).$$

$$M = \bigcup_{\nu} truncated(T_\nu)$$

$$M = \bigcup_{\nu} truncated(T_\nu)$$

$$\rho : \pi_1(M, p_0) \rightarrow \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C}).$$

$$M = \bigcup_{\nu} truncated(T_\nu)$$

$$\rho : \pi_1(M, p_0) \rightarrow \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C}).$$

l'holonomie du bord fixe un drapeau :

$$M = \bigcup_{\nu} truncated(T_\nu)$$

$$\rho : \pi_1(M, p_0) \rightarrow \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C}).$$

l'holonomie du bord fixe un drapeau :

$$\pi_1(\partial M) = \pi_1(T^2) = \langle a, b \rangle$$

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} A & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & A^* \end{pmatrix} \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} B & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & B^* \end{pmatrix}$$

Triangulation \mathcal{T} de $M : M = \bigcup_{\nu} truncated(T_{\nu})$

Triangulation \mathcal{T} de $M : M = \bigcup_{\nu} truncated(T_{\nu})$

$\mathcal{R}(M, \mathcal{T}) = \{\text{décorations de } T\}$

$\mathcal{R}(M, \mathcal{T}) \longrightarrow Hom(\pi_1(M), PGL(3, \mathbb{C}))/PGL(3, \mathbb{C})$

Triangulation \mathcal{T} de $M : M = \bigcup_{\nu} truncated(T_{\nu})$

$$\mathcal{R}(M, \mathcal{T}) = \{\text{décorations de } T\}$$

$$\mathcal{R}(M, \mathcal{T}) \longrightarrow Hom(\pi_1(M), PGL(3, \mathbb{C}))/PGL(3, \mathbb{C})$$

Généralisations à $PGL(n, \mathbb{C})$:

Garoufalidis-Goerner-Thurston-Zickert, Dimofte-Gabella-Goncharov

Décrire les décos en utilisant les coordonées $z_{ij}(T_\nu)$:

Décrire les décos en utilisant les coordonées $z_{ij}(T_\nu)$:

Décrire les décos en utilisant les coordonées $z_{ij}(T_\nu)$:

equations de faces :

Si T et T' ont une face commune (ijk) alors

$$z_{ijk}(T)z_{ikj}(T') = 1.$$

Décrire les décos en utilisant les coordonées $z_{ij}(T_\nu)$:

equations de faces :

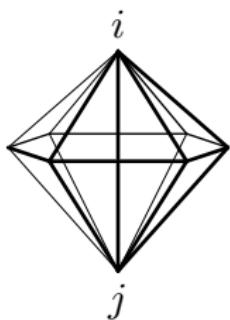
Si T et T' ont une face commune (ijk) alors

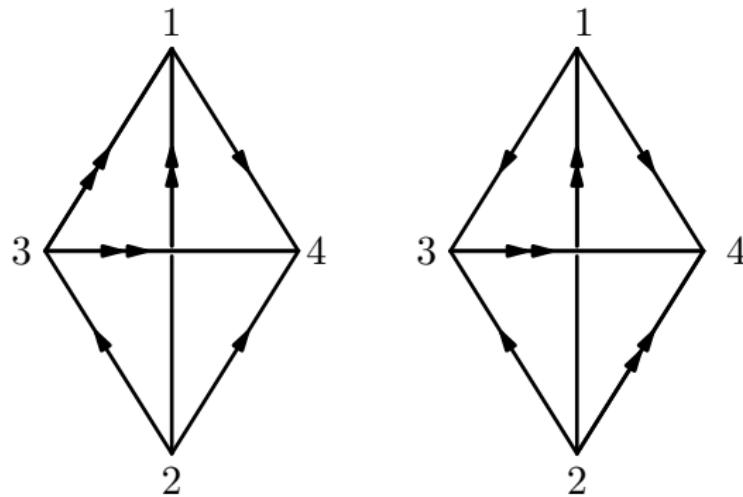
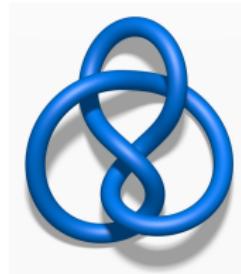
$$z_{ijk}(T)z_{ikj}(T') = 1.$$

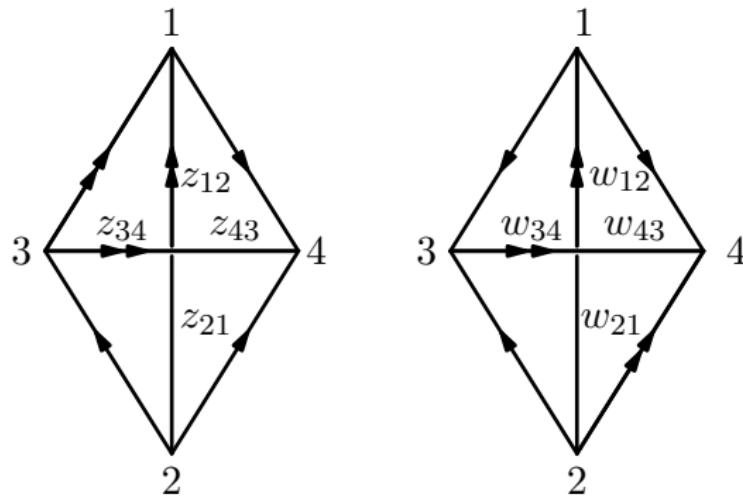
equations d'arêtes :

Si $T_{\nu_1}, \dots, T_{\nu_{n_e}}$ sont les n_e tétraèdres contenant l'arête $e = (ij)$ alors

$$z_{ij}(T_{\nu_1}) \cdots z_{ij}(T_{\nu_{n_e}}) = z_{ji}(T_{\nu_1}) \cdots z_{ji}(T_{\nu_{n_e}}) = 1.$$







Arêtes :

- ❶ $z_{12}w_{12}z_{13}w_{43}z_{43}w_{42} = 1$
- ❷ $z_{21}w_{21}z_{31}w_{34}z_{34}w_{24} = 1$
- ❸ $z_{42}w_{32}z_{32}w_{31}z_{41}w_{41} = 1$
- ❹ $z_{24}w_{23}z_{23}w_{13}z_{14}w_{14} = 1$

Faces :

- ❶ $z_{13}z_{43}z_{23}w_{14}w_{34}w_{24} = 1$
- ❷ $z_{14}z_{24}z_{34}w_{21}w_{41}w_{31} = 1$
- ❸ $z_{12}z_{42}z_{32}w_{13}w_{43}w_{23} = 1$
- ❹ $z_{21}z_{31}z_{41}w_{12}w_{32}w_{42} = 1$

Holonomies du bord :

- $A = z_{41} \frac{1}{w_{32}} z_{31} \frac{1}{w_{24}} z_{23} \frac{1}{w_{14}} z_{13} \frac{1}{w_{42}}$
- $B = z_{43} \frac{1}{w_{41}}$
- $A^* = \frac{1}{z_{14}} \frac{w_{14}w_{41}}{w_{32}} \frac{1}{z_{13}} \frac{w_{13}w_{31}}{w_{24}} \frac{1}{z_{32}} \frac{w_{23}w_{32}}{w_{14}} \frac{1}{z_{31}} \frac{w_{31}w_{13}}{w_{42}}$
- $B^* = \frac{1}{z_{34}} \frac{w_{23}w_{32}}{w_{41}}$

triangulation de la variété + coordonnées z_{ij}



Calculs numériques et bases de Groebner



Structures géométriques

Solutions pour le noeud huit avec holonomie du bord unipotente

$$A = A^* = B = B^* = 1$$

Solutions pour le noeud huit avec holonomie du bord unipotente

$$A = A^* = B = B^* = 1$$

hyperbolic solutions (Riley-Thurston)

$$z_{12} = z_{21} = z_{34} = z_{43} = w_{12} = w_{21} = w_{34} = w_{43} = \omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Solutions pour le noeud huit avec holonomie du bord unipotente

$$A = A^* = B = B^* = 1$$

hyperbolic solutions (Riley-Thurston)

$$z_{12} = z_{21} = z_{34} = z_{43} = w_{12} = w_{21} = w_{34} = w_{43} = \omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

CR solutions

Solutions pour le noeud huit avec holonomie du bord unipotente

$$A = A^* = B = B^* = 1$$

hyperbolic solutions (Riley-Thurston)

$$z_{12} = z_{21} = z_{34} = z_{43} = w_{12} = w_{21} = w_{34} = w_{43} = \omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

CR solutions

$$z_{12} = \bar{z}_{21} = z_{34} = \bar{z}_{43} = w_{12} = \bar{w}_{21} = w_{34} = \bar{w}_{43} = \omega,$$

Solutions pour le noeud huit avec holonomie du bord unipotente

$$A = A^* = B = B^* = 1$$

hyperbolic solutions (Riley-Thurston)

$$z_{12} = z_{21} = z_{34} = z_{43} = w_{12} = w_{21} = w_{34} = w_{43} = \omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

CR solutions

$$z_{12} = \bar{z}_{21} = z_{34} = \bar{z}_{43} = w_{12} = \bar{w}_{21} = w_{34} = \bar{w}_{43} = \omega,$$

$$z_{12} = \frac{5 - i\sqrt{7}}{4}, z_{21} = \frac{3 - i\sqrt{7}}{8}, z_{34} = \frac{5 + i\sqrt{7}}{4}, z_{43} = \frac{3 + i\sqrt{7}}{8}$$

$$w_{12} = \frac{3 - i\sqrt{7}}{8}, w_{21} = \frac{5 - i\sqrt{7}}{4}, w_{34} = \frac{3 + i\sqrt{7}}{8}, w_{43} = \frac{5 + i\sqrt{7}}{4}$$

Solutions pour le noeud huit avec holonomie du bord unipotente

$$A = A^* = B = B^* = 1$$

hyperbolic solutions (Riley-Thurston)

$$z_{12} = z_{21} = z_{34} = z_{43} = w_{12} = w_{21} = w_{34} = w_{43} = \omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

CR solutions

$$z_{12} = \bar{z}_{21} = z_{34} = \bar{z}_{43} = w_{12} = \bar{w}_{21} = w_{34} = \bar{w}_{43} = \omega,$$

$$z_{12} = \frac{5 - i\sqrt{7}}{4}, z_{21} = \frac{3 - i\sqrt{7}}{8}, z_{34} = \frac{5 + i\sqrt{7}}{4}, z_{43} = \frac{3 + i\sqrt{7}}{8}$$

$$w_{12} = \frac{3 - i\sqrt{7}}{8}, w_{21} = \frac{5 - i\sqrt{7}}{4}, w_{34} = \frac{3 + i\sqrt{7}}{8}, w_{43} = \frac{5 + i\sqrt{7}}{4}$$

$$z_{12} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}, z_{21} = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2}, z_{34} = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4}, z_{43} = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}$$

$$w_{12} = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}, w_{21} = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4}, w_{34} = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2}, w_{43} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}$$

$$\Gamma = \pi_1(M)$$

$$\Gamma = \langle g_1, g_3 \mid [g_3, g_1^{-1}]g_3 = g_1[g_3, g_1^{-1}] \rangle.$$

$$\Gamma = \pi_1(M)$$

$$\Gamma = \langle g_1, g_3 \mid [g_3, g_1^{-1}]g_3 = g_1[g_3, g_1^{-1}] \rangle.$$

①

$$\rho_1(g_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_1(g_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Gamma = \pi_1(M)$$

$$\Gamma = \langle g_1, g_3 \mid [g_3, g_1^{-1}]g_3 = g_1[g_3, g_1^{-1}] \rangle.$$

1

$$\rho_1(g_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_1(g_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2

$$\rho_2(g_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_2(g_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Gamma = \pi_1(M)$$

$$\Gamma = \langle g_1, g_3 \mid [g_3, g_1^{-1}]g_3 = g_1[g_3, g_1^{-1}] \rangle.$$

1

$$\rho_1(g_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_1(g_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2

$$\rho_2(g_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_2(g_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3

$$\rho_3(g_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_3(g_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i & 1 \end{pmatrix}.$$

- Conjecture de Poincaré (1904) : toute variété de dimension 3 compacte simplement connexe est homéomorphe à la sphère.

- Conjecture de Poincaré (1904) : toute variété de dimension 3 compacte simplement connexe est homéomorphe à la sphère.
- Riley (1970) : exemples des structures hyperboliques complètes de volume fini sur des complémentaires des noeuds (représentations paraboliques dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$).

- Conjecture de Poincaré (1904) : toute variété de dimension 3 compacte simplement connexe est homéomorphe à la sphère.
- Riley (1970) : exemples des structures hyperboliques complètes de volume fini sur des complémentaires des noeuds (représentations paraboliques dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$).
- Conjecture de Thurston (1976) : toute variété de dimension 3 peut être décomposée en parties, chacune ayant une structure géométrique (en fait, une métrique) localement homogène : les huit géométries de Thurston.

- Conjecture de Poincaré (1904) : toute variété de dimension 3 compacte simplement connexe est homéomorphe à la sphère.
- Riley (1970) : exemples des structures hyperboliques complètes de volume fini sur des complémentaires des noeuds (représentations paraboliques dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$).
- Conjecture de Thurston (1976) : toute variété de dimension 3 peut être décomposée en parties, chacune ayant une structure géométrique (en fait, une métrique) localement homogène : les huit géométries de Thurston. La géométrie hyperbolique est la plus importante. Est associée au groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.

- Conjecture de Poincaré (1904) : toute variété de dimension 3 compacte simplement connexe est homéomorphe à la sphère.
- Riley (1970) : exemples des structures hyperboliques complètes de volume fini sur des complémentaires des noeuds (représentations paraboliques dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$).
- Conjecture de Thurston (1976) : toute variété de dimension 3 peut être décomposée en parties, chacune ayant une structure géométrique (en fait, une métrique) localement homogène : les huit géométries de Thurston. La géométrie hyperbolique est la plus importante. Est associée au groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.
- J. Weeks, élève de Thurston, implante le logiciel SnapPea qui cherche, à partir d'une triangulation d'une variété de dimension 3, une structure hyperbolique (début des années 80).

- Conjecture de Poincaré (1904) : toute variété de dimension 3 compacte simplement connexe est homéomorphe à la sphère.
- Riley (1970) : exemples des structures hyperboliques complètes de volume fini sur des complémentaires des noeuds (représentations paraboliques dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$).
- Conjecture de Thurston (1976) : toute variété de dimension 3 peut être décomposée en parties, chacune ayant une structure géométrique (en fait, une métrique) localement homogène : les huit géométries de Thurston. La géométrie hyperbolique est la plus importante. Est associée au groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.
- J. Weeks, élève de Thurston, implante le logiciel SnapPea qui cherche, à partir d'une triangulation d'une variété de dimension 3, une structure hyperbolique (début des années 80). Chaque simplex de la triangulation est paramétré par une coordonné géométrique et les équations sont résolues par une méthode numérique.

- Conjecture de Poincaré (1904) : toute variété de dimension 3 compacte simplement connexe est homéomorphe à la sphère.
- Riley (1970) : exemples des structures hyperboliques complètes de volume fini sur des complémentaires des noeuds (représentations paraboliques dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$).
- Conjecture de Thurston (1976) : toute variété de dimension 3 peut être décomposée en parties, chacune ayant une structure géométrique (en fait, une métrique) localement homogène : les huit géométries de Thurston. La géométrie hyperbolique est la plus importante. Est associée au groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.
- J. Weeks, élève de Thurston, implante le logiciel SnapPea qui cherche, à partir d'une triangulation d'une variété de dimension 3, une structure hyperbolique (début des années 80). Chaque simplex de la triangulation est paramétré par une coordonné géométrique et les équations sont résolues par une méthode numérique.
- Thurston “démontre” l'hyperbolisation des variétés dites Haken (début '80). Médaille Fields 1982.

- (> 90) Implantations d'autres logiciels pour traiter la géométrie en dimension 3. SnapPy (Culler, Dunfield) , REGINA (Ben Burton). Aspects combinatoires et géométrie hyperbolique.

- (> 90) Implantations d'autres logiciels pour traiter la géométrie en dimension 3. SnapPy (Culler, Dunfield) , REGINA (Ben Burton). Aspects combinatoires et géométrie hyperbolique.
- Preuve de la conjecture de Thurston par Perelman (2003, médaille Fields 2006) en suivant le programme de Richard Hamilton pour le flot de Ricci qu'il étudie à partir de 1982.

- (> 90) Implantations d'autres logiciels pour traiter la géométrie en dimension 3. SnapPy (Culler, Dunfield) , REGINA (Ben Burton). Aspects combinatoires et géométrie hyperbolique.
- Preuve de la conjecture de Thurston par Perelman (2003, médaille Fields 2006) en suivant le programme de Richard Hamilton pour le flot de Ricci qu'il étudie à partir de 1982.
- (> 90) D'autres géométries (non-métriques) en dimension 3. En particulier, la géométrie de Cauchy Riemann (CR) modelé sur le bord de l'espace hyperbolique complexe.

- (> 90) Implantations d'autres logiciels pour traiter la géométrie en dimension 3. SnapPy (Culler, Dunfield) , REGINA (Ben Burton). Aspects combinatoires et géométrie hyperbolique.
- Preuve de la conjecture de Thurston par Perelman (2003, médaille Fields 2006) en suivant le programme de Richard Hamilton pour le flot de Ricci qu'il étudie à partir de 1982.
- (> 90) D'autres géométries (non-métriques) en dimension 3. En particulier, la géométrie de Cauchy Riemann (CR) modelé sur le bord de l'espace hyperbolique complexe.
- Exemples de structures CR ou de drapeaux ? Fibrés en cercles (représentation des groupes des surfaces), Schwartz (entrelac de Whitehead et chirurgies de Dehn).

- (> 90) Implantations d'autres logiciels pour traiter la géométrie en dimension 3. SnapPy (Culler, Dunfield) , REGINA (Ben Burton). Aspects combinatoires et géométrie hyperbolique.
- Preuve de la conjecture de Thurston par Perelman (2003, médaille Fields 2006) en suivant le programme de Richard Hamilton pour le flot de Ricci qu'il étudie à partir de 1982.
- (> 90) D'autres géométries (non-métriques) en dimension 3. En particulier, la géométrie de Cauchy Riemann (CR) modelé sur le bord de l'espace hyperbolique complexe.
- Exemples de structures CR ou de drapeaux ? Fibrés en cercles (représentation des groupes des surfaces), Schwartz (entrelac de Whitehead et chirurgies de Dehn).
- Bases de Groebner → Koseleff, Rouillier (aussi Goerner-Zickert-Dunfield -SnapPy) calculs pour $PGL(3, \mathbb{C})$ (2013) :

- (> 90) Implantations d'autres logiciels pour traiter la géométrie en dimension 3. SnapPy (Culler, Dunfield) , REGINA (Ben Burton). Aspects combinatoires et géométrie hyperbolique.
- Preuve de la conjecture de Thurston par Perelman (2003, médaille Fields 2006) en suivant le programme de Richard Hamilton pour le flot de Ricci qu'il étudie à partir de 1982.
- (> 90) D'autres géométries (non-métriques) en dimension 3. En particulier, la géométrie de Cauchy Riemann (CR) modelé sur le bord de l'espace hyperbolique complexe.
- Exemples de structures CR ou de drapeaux ? Fibrés en cercles (représentation des groupes des surfaces), Schwartz (entrelac de Whitehead et chirurgies de Dehn).
- Bases de Groebner → Koseleff, Rouillier (aussi Goerner-Zickert-Dunfield -SnapPy) calculs pour $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ (2013) :

**Quelles variétés de dimension 3
admettent une structure CR ou de drapeaux réels ?
Géométrisation des structures de contact.**

| Zero-dimensional prime components | | | | | | | | |
|-----------------------------------|-----|--------------------|------------|------------|------------|------------|------------|---|
| Number(s) of Solutions | | | | | | | | |
| Name | 1-D | Ext. Degrees | $PGL_3(C)$ | $PSL_3(R)$ | $PSL_2(C)$ | $PSL_2(R)$ | $PU(2, 1)$ | Volumes |
| m003 | 2 | 2, 2, 8, 8 | | 20 | 0 | 2 | 0 | 2 0.648847 2.029883 |
| m004 | 0 | 2, 2, 2, 2 | | 8 | 0 | 2 | 0 | 6 2.029883 |
| m006 | 2 | 6, 6, 12, 28 | | 43 | 1 | 3 | 1 | 15 0.707031 0.719829 0.971648 1.284485 2.568971 |
| m007 | 0 | 3, 6, 8, 8, 8 | | 33 | 1 | 3 | 1 | 15 0.707031 0.822744 1.336688 2.568971 |
| m009 | 0 | 2, 4, 4, 4, 6, 8 | | 28 | 2 | 2 | 0 | 8 0.507471 0.791583 1.417971 2.666745 |
| m010 | 2 | 2, 6, 6, 12, 12 | | 38 | 0 | 2 | 0 | 4 0.251617 0.791583 0.809805 0.982389 1.323430 2.666745 |
| m011 | 1 | 3, 4, 16, 64 | | 87 | 5 | 7 | 3 | 21 0.226838 0.251809 0.328272 0.397457 0.452710 0.643302 0.685598 0.700395 0.724553 0.770297 0.879768 0.942707 0.988006 1.099133 1.184650 1.846570 2.781834 |
| m015 | 0 | 3, 4, 4, 6, 6 | | 23 | 3 | 3 | 1 | 11 0.794323 1.583167 2.828122 |
| m016 | 1 | 3, 3, 10, 50 | | 66 | 4 | 6 | 4 | 24 0.296355 0.403707 0.710033 0.753403 0.773505 0.796590 0.886451 1.135560 1.422985 1.505989 2.828122 |
| m017 | 3 | 3, 4, 6, 6, 44 | | 63 | 1 | 3 | 1 | 21 0.527032 0.794323 0.801984 0.828705 1.252969 1.588647 2.828122 |
| m019 | 1 | 4, 4, 22, 84 | | 114 | 6 | 8 | 4 | 24 0.027351 0.062112 0.323395 0.332856 0.347159 0.411244 0.467624 0.524801 0.544151 0.599455 0.638404 0.738805 0.758111 0.798098 0.851139 0.916588 1.101800 1.130263 1.190919 1.263709 1.340255 2.111776 2.944106 |
| Wh. link | 0 | 2, 2, 4, 4, 10, 10 | | 32 | 0 | 2 | 0 | 14 1.132196 1.683102 3.663862 |