Travaux Dirigés de calcul formel n°7

Cours d'Informatique de Deuxième Année

—DEUG Sciences S4-MI—

Combinatoire, calcul formel

Lors de cette séance, nous énumérons les arbres "enracinés". Nous aborderons des méthodes combinatoires pour l'énumération, ainsi que des aspects algorithmiques (récurrence) pour le calcul.

▸ **Exercice 1.** ***(Nombre d'arbres enracinés)*** *On souhaite compter le nombre d'arbres enracinés quelconques à n arêtes. Un arbre enraciné est arbre où une arête orientée a été choisie (elle définit la racine).*

1. *Dessiner les arbres enracinés respectivement à zéro, une, deux et trois arêtes.*
2. *Pour énumérer cette famille d'arbres, on introduit la série formelle $D(z)$ où le degré de z correspond au nombre d'arêtes. Par exemple, le terme $5\,z^3$ de la série $D(z)$ nous indique qu'il existe cinq arbres enracinés différents à trois arêtes. Donner les premiers termes de $D(z)$ correspondant aux cas zéro, un, deux et trois arêtes.*
3. *Deux sous-familles différentes apparaissent : la famille réduite à un nœud et la famille avec au moins une arête. La série D s'exprime donc comme la somme des contributions de ces deux sous-familles. Donner la contribution de la première sous-famille.*
4. *Pour trouver la contribution de la seconde sous-famille, on propose de supprimer l'arête racine. Qu'obtient-on ? Comment réaliser l'opération inverse ? En déduire la contribution de cette sous-famille.*
5. *Écrire l'équation dont $D(z)$ est solution, la résoudre.*
6. *Développer cette série – à l'aide de MuPAD par exemple – à l'ordre 10 pour obtenir les nombres d'arbres enracinés de zéro à 9 arêtes. Cette méthode vous semble-t-elle efficace ?*

▸ **Exercice 2.** ***(Suite...)***

1. *Déduire de l'équation de l'exercice précédent, une récurrence sur le nombre d_n d'arbres enracinés à n arêtes (indication : regarder le coefficient de z^n).*

2. *Calculer d_4. Écrire une fonction C implémentant la récurrence. Quelle est sa complexité ?*

3. *Proposer un algorithme polynomial en temps pour calculer d_n. Quel est l'espace mémoire nécessaire ?*