Raccourcissement de courbes

et

décomposition de surfaces

Éric Colin de Verdière

École normale supérieure (Paris) et Université Paris VII

Résultats de la thèse

- Théorème barycentrique de Tutte appliqué aux isotopies
  avec Michel Pocchiola et Gert Vegter.
  [1] *Computational Geometry : Theory and Applications, 2003.*
- Triangulations de Delaunay conformes 3D
  avec David Cohen-Steiner et Mariette Yvinec.
  [2] *Symposium on Computational Geometry, 2002* ;
  [2'] *Computational Geometry : Theory and Applications, à paraître.*
- Optimisation de courbes sur des surfaces
  - *avec Francis Lazarus* :
    [3] *Symposium on Foundations of Computer Science, 2002* ;
    [4] *Symposium on Graph Drawing, 2003* ;
  - *dans cette thèse :*
    - extension des résultats de [3] ;
    - simplification des démonstrations de [3] ;
    - simplification pour une étape de [4].

Décomposer, raccourcir, déformer

Topologie algorithmique des surfaces.

- Décomposer topologiquement des surfaces ;

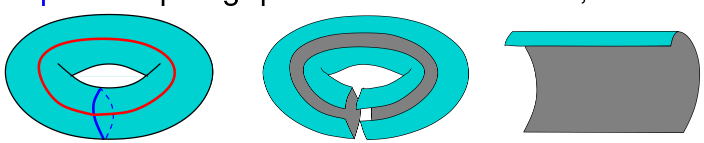
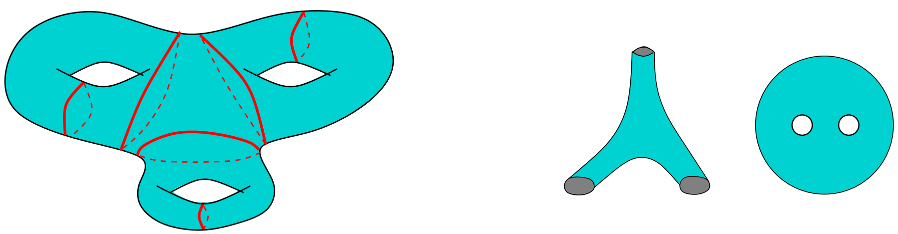


schéma polygonal

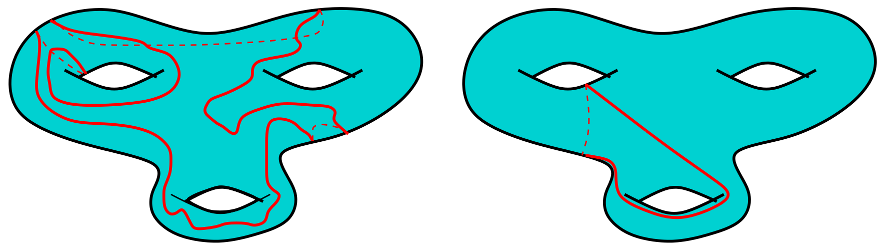


décomposition en pantalons

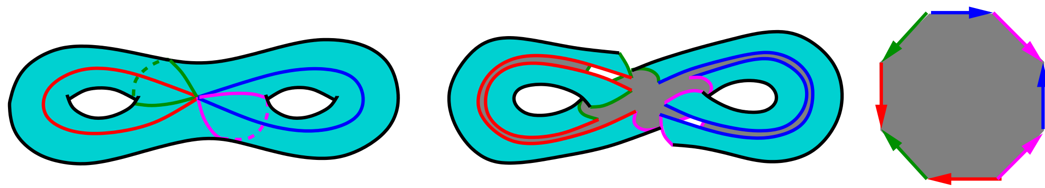
- raccourcir des courbes sur des surfaces par déformation.

Motivations

- spécialisation du problème de calcul de plus courts chemins ;
- représentant « canonique » d'une classe d'homotopie ;

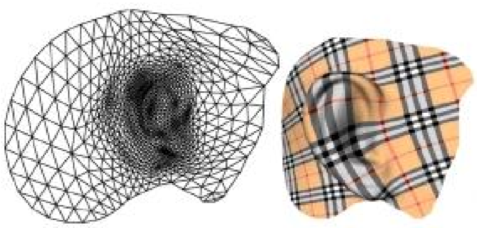


- calcul d'homéomorphismes.



Motivations en infographie

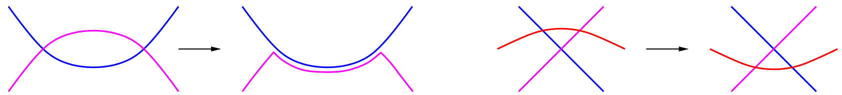
- CAO, modélisation géométrique, dessin 3D ;
- paramétrage (visualisation, plaquage de texture, maillage et calcul numérique, remaillage) ;
- analyse multi-échelle ;
- compression géométrique.



[Desbrun, Meyer, Alliez, 2002]

Travaux antérieurs

- Topologie algébrique classique (début du XX^e siècle) ;
- ♦ calcul efficace de schémas polygonaux canoniques [Vegter, Yap, 1990], [Lazarus, Pocchiola, Vegter, Verroust, 2001] ;
  - ♦ calcul du plus court schéma polygonal sur le graphe sommets-arêtes d'une surface polyédrale [Erickson, Har-Peled, 2002] ;
- ♦ simplicité d'un plus court cycle homotope à un cycle simple donné [Hass, Scott, 1982] ;
  - ♦ décroisement de courbes, mouvements de Reidemeister [Hass, Scott, 1985], [de Graaf, Schrijver, 1997] ;

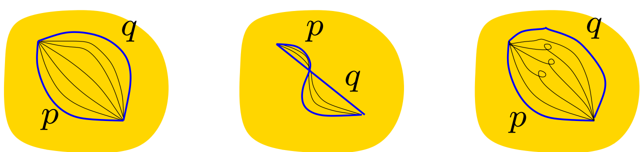


- calcul de plus courtes courbes homotopes dans le plan [Hershberger, Snoeyink, 1994], [Efrat, Kobourov, Lubiw 2002], [Bespamyatnikh, 2003].

Plongements de graphes et de cycles

Optimisation
- d'un plongement de graphe ;
- d'un plongement de cycles (famille de cycles simples et deux à deux disjoints).

Trouver le plus court plongement homotope (ou isotope) au plongement donné.

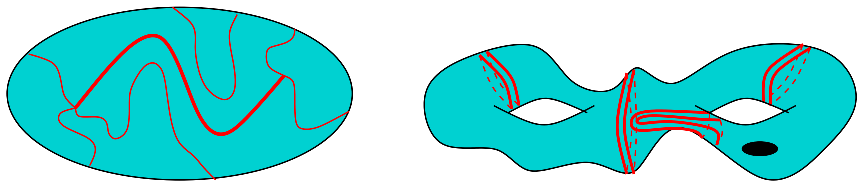


pas une isotopie

Aperçu

$S = (s_1, \ldots, s_N)$ système de découpage décomposant la surface en surfaces topologiquement élémentaires.

- Algorithme glouton, itératif, simple ;



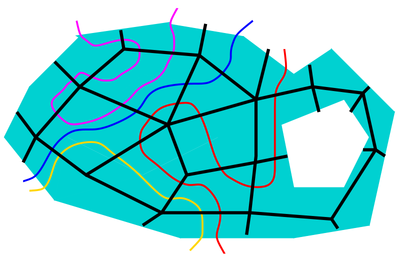
- résultat : après itération, chaque courbe s_i est individuellement aussi courte que possible dans une classe d'homotopie ou d'isotopie ;
- conséquence : complétion, optimisation, extraction.

Plan

1. Cadre de l'étude
2. Optimisation de plongements de graphe
3. Optimisation de plongements de cycles
4. Étude de la complexité

1. Cadre de l'étude

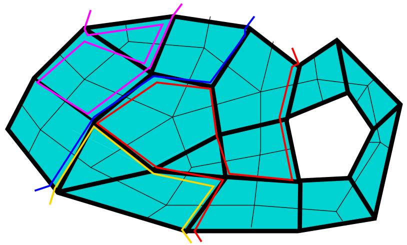
Notion de longueur

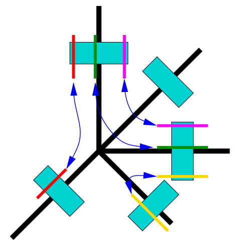


- Surface $\mathcal{M}$ connexe, compacte, orientable, év. à bords ;
- graphe $\mathcal{B}$ pondéré plongé sur $\mathcal{M}$;
- longueur $|c|$ d'une courbe c : somme des poids des arêtes de $\mathcal{B}$ croisées par c.

Courbes régulières par rapport à $\mathcal{B}$.
La position exacte des courbes à l'intérieur d'une face n'importe pas.

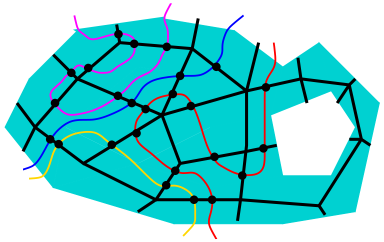
Notion de longueur

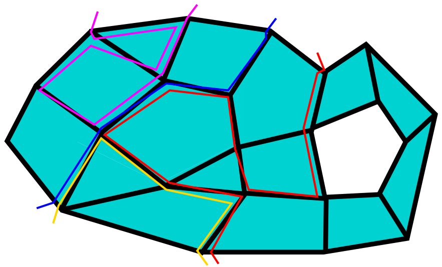




- $\mathcal{M}$ polyédrale, de graphe sommets-arêtes $\mathcal{N}$ pondéré ;
- courbes « longeant » le graphe $\mathcal{N}$ sans se « croiser » ;
- structure de données : chemins « ordonnés » dans $\mathcal{N}$;
- longueur : calculée dans le graphe $\mathcal{N}$.

Dualité





- cadre topologique (nombre de croisements avec le graphe $\mathcal{B}$) : démonstrations ;
- cadre algorithmique (opérations utilisant le graphe $\mathcal{N}$) : algorithmes et complexité.

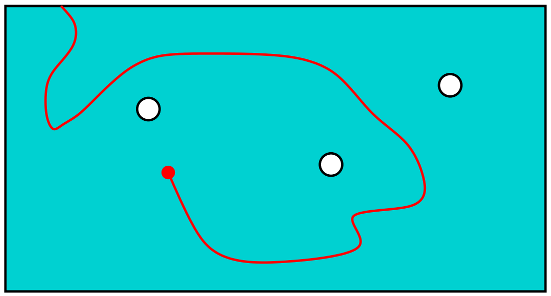
Intérêt :

- parfois souhaitable (remaillage, calcul approché) ;
- techniques susceptibles d'extensions.

2. Plongements de graphe

Complétion

$s = (s_1, \ldots, s_n)$ plongement de graphe.



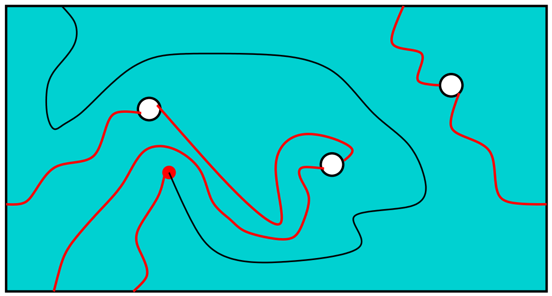
Complétion en un plongement de graphe $S = (s_1, \ldots, s_N)$ tel que, pour tout i, la face de $S \setminus s_i$ contenant s_i est un disque, séparé en deux par s_i.

C'est un système de découpage par graphe.

Proposition. C'est possible sans ajouter de sommets à l'intérieur de $\mathcal{M}$ (si $n \geq 1$).

Complétion

$s = (s_1, \ldots, s_n)$ plongement de graphe.



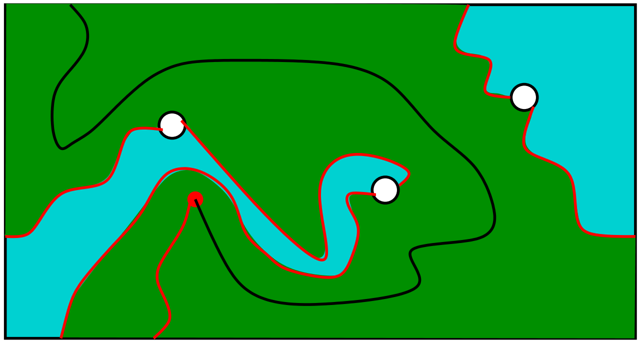
Complétion en un plongement de graphe $S = (s_1, \ldots, s_N)$ tel que, pour tout i, la face de $S \setminus s_i$ contenant s_i est un disque, séparé en deux par s_i.

C'est un système de découpage par graphe.

Proposition. C'est possible sans ajouter de sommets à l'intérieur de $\mathcal{M}$ (si $n \geq 1$).

Optimisation et extraction

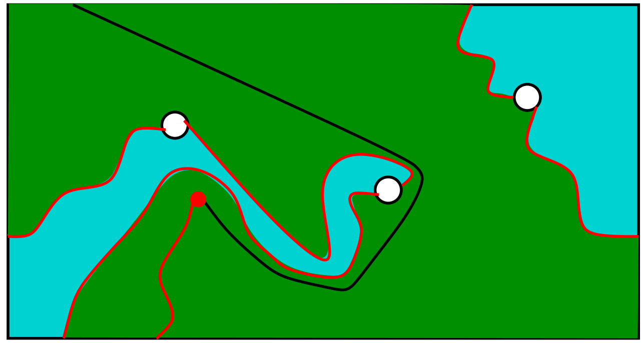
- Étape élémentaire rac$_i(S)$: raccourcir s_i dans le disque de $S \setminus s_i$ dans lequel il se trouve.
- Étape principale rac $=$ rac$_N \circ$ rac$_{N-1} \circ \ldots \circ$ rac$_1$.
- Algorithme : itérer rac jusqu'à stabilité des longueurs.



$$s_{1\ldots n} \xrightarrow{\text{complétion}} S_{1\ldots N} \xrightarrow{\text{optimisation}} S'_{1\ldots N} \xrightarrow{\text{extraction}} s'_{1\ldots n}$$

Optimisation et extraction

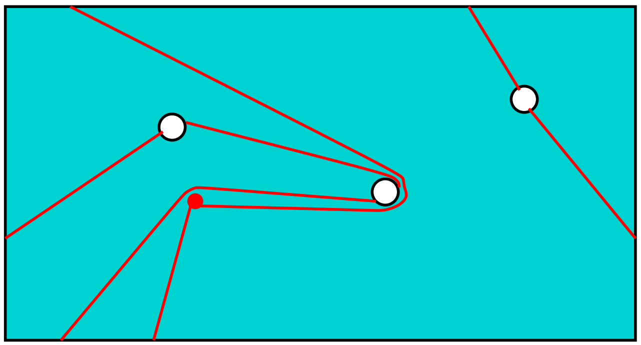
- Étape élémentaire rac$_i(S)$: raccourcir s_i dans le disque de $S \setminus s_i$ dans lequel il se trouve.
- Étape principale rac $=$ rac$_N \circ$ rac$_{N-1} \circ \ldots \circ$ rac$_1$.
- Algorithme : itérer rac jusqu'à stabilité des longueurs.



$$s_{1\ldots n} \xrightarrow{\text{complétion}} S_{1\ldots N} \xrightarrow{\text{optimisation}} S'_{1\ldots N} \xrightarrow{\text{extraction}} s'_{1\ldots n}$$

Optimisation et extraction

- Étape élémentaire rac$_i(S)$: raccourcir s_i dans le disque de $S \setminus s_i$ dans lequel il se trouve.
- Étape principale rac $=$ rac$_N \circ$ rac$_{N-1} \circ \ldots \circ$ rac$_1$.
- Algorithme : itérer rac jusqu'à stabilité des longueurs.



$$s_{1\ldots n} \xrightarrow{\text{complétion}} S_{1\ldots N} \xrightarrow{\text{optimisation}} S'_{1\ldots N} \xrightarrow{\text{extraction}} s'_{1\ldots n}$$

Résultat – cas particulier

Théorème (I). Si tous les sommets sont sur le bord de $\mathcal{M}$:

- Stabilité atteinte : $\exists m, |$rac$^{m+1}(S)| = |$rac$^m(S)|$;
- soit $S' =$ rac$^m(S)$. Pour tout $i \in [1 \ldots N]$, s'_i est un plus court chemin parmi tous les chemins homotopes à s_i.

Conséquence. On peut, pour tout i, remplacer s_i par un plus court chemin homotope s'_i de sorte que les s'_i soient simples et deux à deux disjoints.

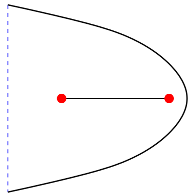
Résultat – cas général

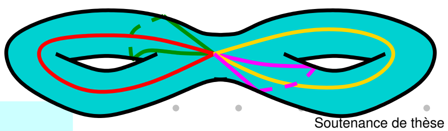
Théorème (II).

- $\exists m, |\mathrm{rac}^{m+1}(S)| = |\mathrm{rac}^m(S)|$;
- soit $S' = \mathrm{rac}^m(S)$. Pour tout $i \in [1 \dots N]$, s'_i est un plus court chemin parmi tous les chemins simples isotopes à s_i dans $\mathcal{M}$ privé des sommets de s non extrémités de s_i.

Conséquences :

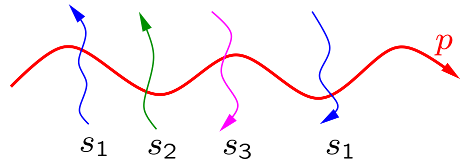
- s' est de longueur minimale parmi les plongements de graphe isotopes à sommets fixés à s ;
- si s est un système fondamental de lacets, alors, pour tout i, s'_i est de longueur minimale parmi les lacets simples homotopes à s_i (avec [Epstein, 1966]).





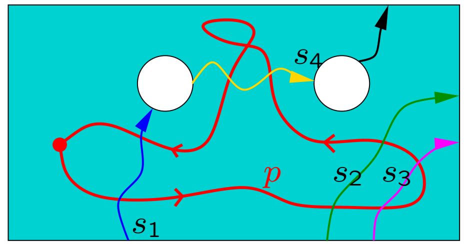
Mot des croisements

S : chemins simples et deux à deux disjoints dont les extrémités sont sur $\partial\mathcal{M}$.
Mot des croisements S/p d'un chemin p avec S : liste des croisements.



$S/p = 1\ 2\ \bar{3}\ \bar{1}$

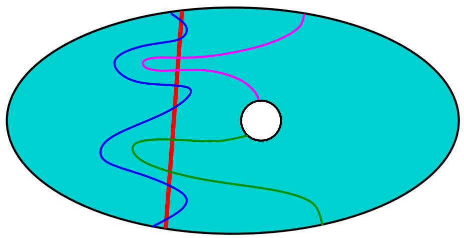
Si p est un chemin fermé contractile, alors S/p est parenthésé.



$S/p = \underbrace{1\ \underbrace{2\ \underbrace{3\ \bar{3}}\ \bar{2}}\ \underbrace{\bar{4}\ 4}\ \bar{1}}$

Démonstration de (I)

- $i \in [1 \dots N]$;
- t_i « longeant » s_i ;
- raccourcir t_i autant que possible dans sa classe d'homotopie.
  t_i n'est pas forcément simple.



$S/t_i = 1\ \bar{1}\ 2\ \bar{2}\ 1\ \bar{1}\ 3\ \bar{3}\ 1\ \bar{1}$

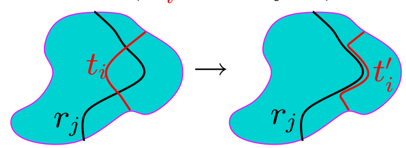
But : montrer qu'à une certaine étape, on a $|s_i| = |t_i|$.

- S/t_i est parenthésé ;
- chaque application de rac_j supprime les $j\bar{j}$ et $\bar{j}j$:
  $$(\mathrm{rac}_j(S))/t_i = \mathrm{red}_j(S/t_i)\ ;$$
- si S et t_i sont disjoints, après une itération supplémentaire, le $i^{\text{ème}}$ chemin et t_i ont même longueur.

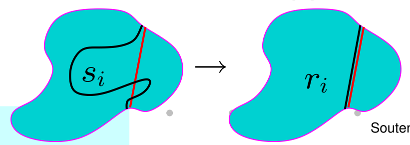
Démonstration de (I), suite et fin

- Si $R = \mathrm{rac}_j(S)$ alors : $\mathrm{red}_j(R/t_i) = \mathrm{red}_j(S/t_i)$.

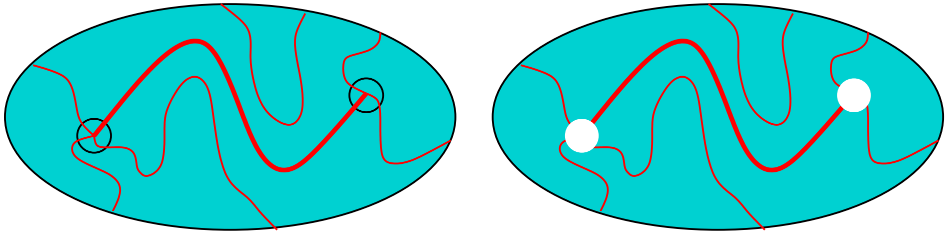
- Il existe t'_i ayant les mêmes propriétés que t_i tel que :
  $$R/t'_i = \mathrm{red}_j(S/t_i).$$



- À partir d'une certaine étape, S et t_i sont disjoints (quitte à changer t_i). Après une itération supplémentaire : $|s_i| = |t_i|$.



Idée de la démonstration de (II)



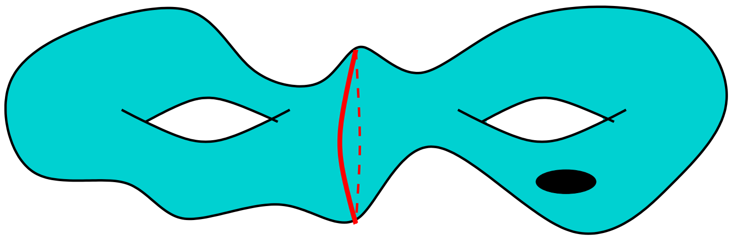
$\mathcal{M}$, S $\qquad$ $\widehat{\mathcal{M}}$, $\widehat{S}$

- Petits disques autour des sommets de S ;
- les optimisations de S et $\widehat{S}$ sont similaires ;
- on applique le théorème (I) à $\widehat{S}$: $\widehat{s}'_i$ est optimal ;
- on se ramène à s'_i.

3. Plongements de cycles

Complétion

$s = (s_1, \ldots, s_n)$ plongement de cycles.

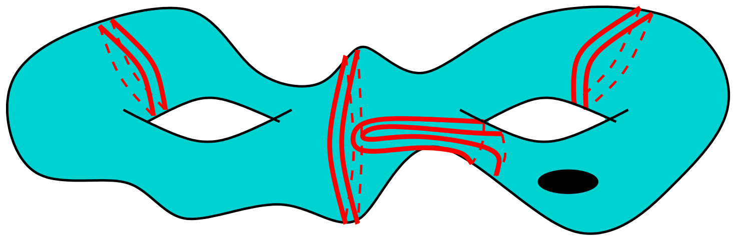


Complétion en un plongement de cycles S tel que, pour tout i, la face de $S \setminus s_i$ contenant s_i est un cylindre ou un pantalon, séparé en cylindres ou pantalons par s_i.
C'est un système de découpage par cycles.

Proposition. C'est toujours possible.

Complétion

$s = (s_1, \ldots, s_n)$ plongement de cycles.

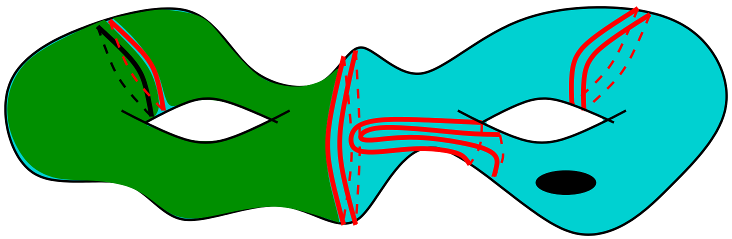


Complétion en un plongement de cycles S tel que, pour tout i, la face de $S \setminus s_i$ contenant s_i est un cylindre ou un pantalon, séparé en cylindres ou pantalons par s_i.
C'est un système de découpage par cycles.

Proposition. C'est toujours possible.

Optimisation et extraction

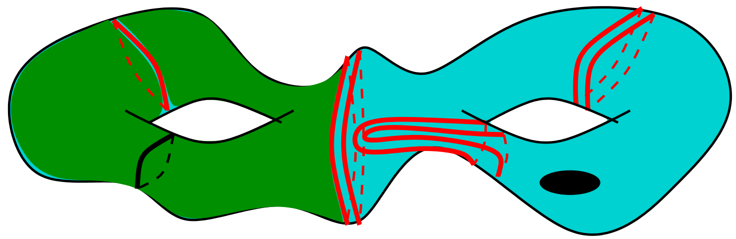
- Étape élémentaire $\text{rac}_i(S)$: remplacer s_i par un plus court cycle simple homotope dans le cylindre ou pantalon de $S \setminus s_i$ dans lequel il se trouve.
- Étape principale $\text{rac} = \text{rac}_N \circ \text{rac}_{N-1} \circ \ldots \circ \text{rac}_1$.
- Algorithme : itérer rac jusqu'à stabilité des longueurs.



$$s_{1\ldots n} \xrightarrow{\text{complétion}} S_{1\ldots N} \xrightarrow{\text{optimisation}} S'_{1\ldots N} \xrightarrow{\text{extraction}} s'_{1\ldots n}$$

Optimisation et extraction

- Étape élémentaire $\text{rac}_i(S)$: remplacer s_i par un plus court cycle simple homotope dans le cylindre ou pantalon de $S \setminus s_i$ dans lequel il se trouve.
- Étape principale $\text{rac} = \text{rac}_N \circ \text{rac}_{N-1} \circ \ldots \circ \text{rac}_1$.
- Algorithme : itérer rac jusqu'à stabilité des longueurs.

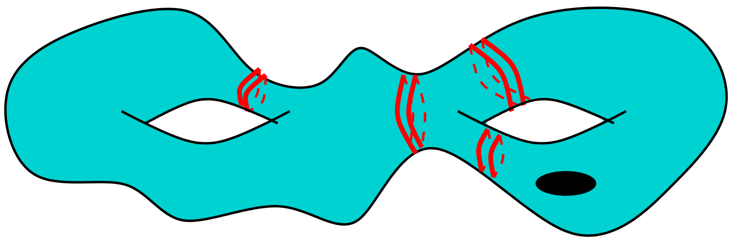


$$s_{1\ldots n} \xrightarrow{\text{complétion}} S_{1\ldots N} \xrightarrow{\text{optimisation}} S'_{1\ldots N} \xrightarrow{\text{extraction}} s'_{1\ldots n}$$

Soutenance de thèse – Éric Colin de Verdière – p.24

Optimisation et extraction

- Étape élémentaire $\text{rac}_i(S)$: remplacer s_i par un plus court cycle simple homotope dans le cylindre ou pantalon de $S \setminus s_i$ dans lequel il se trouve.
- Étape principale $\text{rac} = \text{rac}_N \circ \text{rac}_{N-1} \circ \ldots \circ \text{rac}_1$.
- Algorithme : itérer rac jusqu'à stabilité des longueurs.



$$s_{1\ldots n} \xrightarrow{\text{complétion}} S_{1\ldots N} \xrightarrow{\text{optimisation}} S'_{1\ldots N} \xrightarrow{\text{extraction}} s'_{1\ldots n}$$

Soutenance de thèse – Éric Colin de Verdière – p.24

Résultat

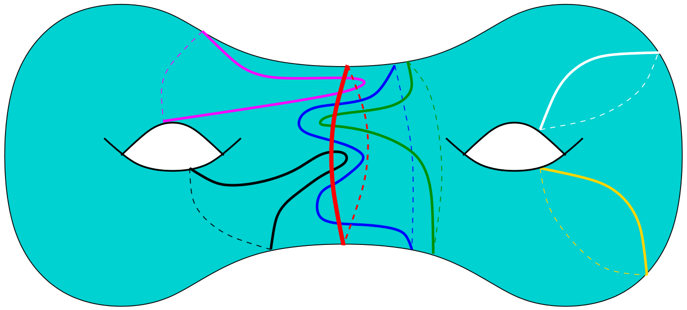
Théorème (III).

- $\exists m, |\text{rac}^{m+1}(S)| = |\text{rac}^m(S)|$;
- soit $S' = \text{rac}^m(S)$. Pour tout $i \in [1 \ldots N]$, s'_i est un plus court cycle homotope à s_i.

Conséquence. On peut, pour tout i, remplacer s_i par un plus court cycle homotope s'_i de sorte que les s'_i soient simples et deux à deux disjoints.

Idée naïve pour montrer (III)

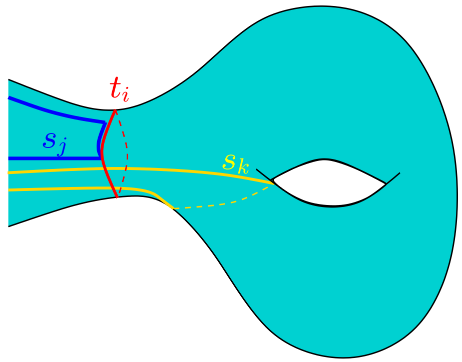
- $i \in [1 \ldots N]$;
- t_i homotope à s_i, aussi court que possible ; t_i n'est pas forcément simple ;
- le mot des croisements S/t_i est parenthésé ;
- il décroît par suppression de $j\bar{j}$ ou $\bar{j}j$.



$1\bar{1}2\bar{2}14\bar{4}\bar{1}3\bar{3}$

En fait...

...tout est plus compliqué.



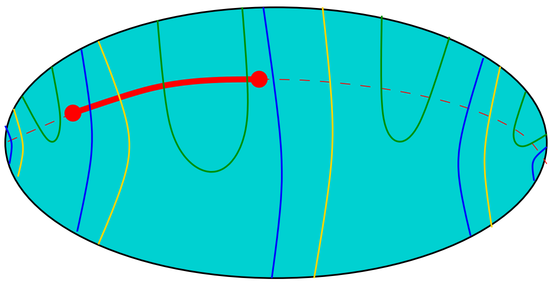
Il faut distinguer selon les classes d'homotopie.

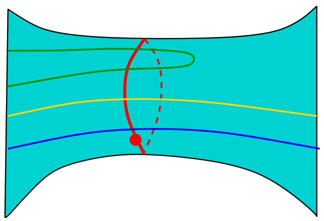
$j^\alpha \bar{j}^\alpha k^\beta \bar{k}^\gamma$

Outils pour montrer (III)

Mots des croisements dans le revêtement universel de la surface : $[S/\widetilde{t_i}]$ est l'ensemble des mots des croisements entre relevés de S et « périodes » d'un relevé $\widetilde{t_i}$ de t_i.

$$j^\alpha.w \simeq w.j^{\tau(\alpha)}$$





$j^\alpha k^\beta \ell^\gamma \bar{\ell}^\gamma$

$$\text{red}_j : w.j^\alpha\bar{j}^\alpha.w' \to w.w', \quad j^\alpha.w.\bar{j}^{\tau(\alpha)} \to w.$$

4. Complexité

Complexité

Algorithmiquement :

- optimisation : calculs de plus courts chemins dans un graphe planaire [Dijkstra], [Henzinger et al, 1997] ;
- complétion *(non présenté ici)*.

Si tous les poids sont unitaires :

- algorithmes polynomiaux en :
  - la complexité de la surface ;
  - la complexité du plongement d'entrée ;
- en particulier :
  - problème NP-difficile : calcul du plus court schéma polygonal [Erickson, Har-Peled, 2002] ;
  - problème polynomial : calcul d'un plus court système fondamental de lacets d'une classe d'homotopie [nous].

Complexité, suite et fin

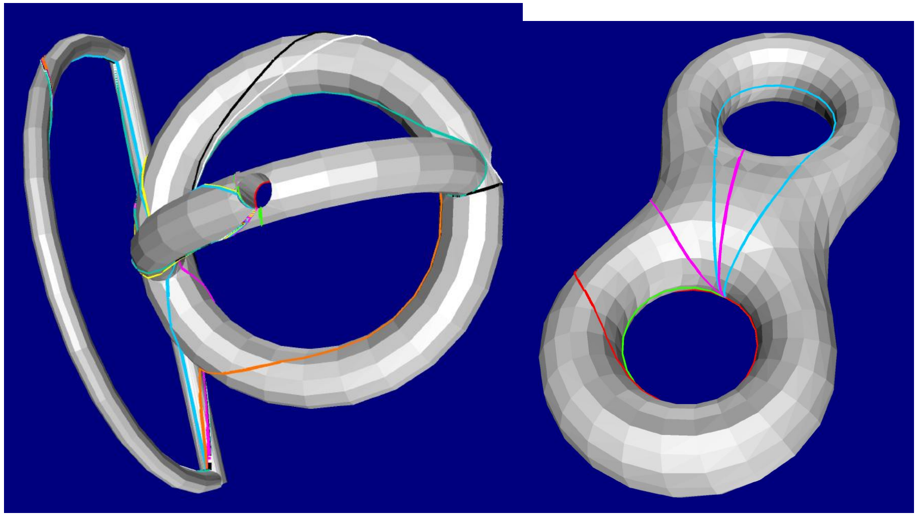
Analyse dans le cas général :

- pour les graphes : $O(\alpha^2 d K^2 \mu^3 (n+g+b)^2)$;
- pour les cycles : $O(\alpha^3 d K^3 \mu^4 (n+g+b)^2)$,

avec

- complexité de la surface :
  - d : degré maximal d'un sommet ;
  - K : nombre de sommets, arêtes et faces ;
  - g, b : nombre de « poignées » et de bords ;
- complexité des courbes d'entrée :
  - μ : nombre maximal de passages d'une courbe d'entrée par une arête du graphe ;
  - n : nombre de courbes d'entrée ;
- α : $\frac{\text{plus longue arête}}{\text{plus courte arête}}$ paramètre « géométrique ».

Conclusion



Prolongements possibles

- Implantation générique complète ; utilisation en pratique ;
- analyse de complexité (α, borne inférieure) ;
- extension aux surfaces non orientables ;
- extension aux surfaces polyédrales, riemanniennes ;
- courbes avec intersections ;
- sommets du graphe non fixés ;
- plus court plongement sans fixer la classe d'homotopie :
  - d'une décomposition en pantalons ;
  - d'un système fondamental de lacets ;
  - d'un graphe donné ;
- surface plongée en 3D : choix plus naturels ?
- dimension supérieure ?