UNIVERSITÉ PARIS 7 — DENIS DIDEROT
UFR D'INFORMATIQUE

THÈSE

présentée et soutenue publiquement
le 8 décembre 2003
pour l'obtention du Diplôme de

Docteur de l'Université Paris 7

Spécialité : Algorithmique

par

Éric COLIN DE VERDIÈRE

Raccourcissement de courbes et décomposition de surfaces

Membres du jury :

M. Christian CHOFFRUT (Univ. Paris 7)	président
Mme Christiane FROUGNY (Univ. Paris 8)	examinatrice
M. Michel POCCHIOLA (ENS Paris)	directeur de thèse
M. Günter ROTE (FU Berlin)	rapporteur
Mme Marie-Françoise ROY (Univ. Rennes 1)	rapporteuse
Mme Brigitte VALLÉE (CNRS et Univ. Caen)	examinatrice

Autre rapporteur :
M. Herbert EDELSBRUNNER (Univ. Duke)

Recherches effectuées au
Laboratoire d'informatique
de l'École normale supérieure

UMR 8 548 du CNRS

UNIVERSITÉ PARIS 7 — DENIS DIDEROT
UFR D'INFORMATIQUE

THÈSE

présentée et soutenue publiquement
le 8 décembre 2003
pour l'obtention du Diplôme de

Docteur de l'Université Paris 7

Spécialité : Algorithmique

par

Éric Colin de Verdière

Raccourcissement de courbes et décomposition de surfaces

Membres du jury :

M. Christian Choffrut (Univ. Paris 7)	président
Mme Christiane Frougny (Univ. Paris 8)	examinatrice
M. Michel Pocchiola (ENS Paris)	directeur de thèse
M. Günter Rote (FU Berlin)	rapporteur
Mme Marie-Françoise Roy (Univ. Rennes 1)	rapporteuse
Mme Brigitte Vallée (CNRS et Univ. Caen)	examinatrice

Autre rapporteur :
M. Herbert Edelsbrunner (Univ. Duke)

Recherches effectuées au
Laboratoire d'informatique
de l'École normale supérieure

UMR 8 548 du CNRS

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Michel Pocchiola, qui m'a guidé et encouragé durant ces trois années de thèse. Il a su me proposer des sujets de recherche intéressants, me faire progresser dans l'art de la rédaction et me prodiguer ses conseils quand le besoin s'en faisait sentir. J'ai particulièrement apprécié son aide lors de la rédaction de ce mémoire.

Je remercie Jacques Stern, qui m'a accueilli au sein du laboratoire d'informatique de l'ENS. Ma reconnaissance s'adresse aussi à Jacques Beigbeder, Kilian Hart et Catherine Le Bihan, qui maintiennent un service informatique de qualité, à Joëlle Isnard, Michelle Angely, Jean-Claude Denise et Valérie Mongiat pour leur disponibilité et leur efficacité dans les nécessaires tâches administratives, et à l'équipe de la bibliothèque.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Herbert Edelsbrunner, Günter Rote et Marie-Françoise Roy, rapporteurs de cette thèse. Qu'ils soient remerciés pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Merci également à Christian Choffrut, Christiane Frougny et Brigitte Vallée d'avoir accepté de siéger dans mon jury de soutenance.

Ma gratitude s'adresse également à Jean-Daniel Boissonnat et à tous les membres de l'équipe Prisme pour leur accueil lors de mes quelques visites à l'Inria Sophia-Antipolis. J'ai apprécié de travailler avec Mariette Yvinec sur les triangulations de Delaunay conformes. Merci à David Cohen-Steiner, dont chaque conversation est source d'idées nouvelles, et à Pierre Alliez, qui sait si bien faire le lien entre théorie et applications.

Je voudrais aussi remercier les autres chercheurs avec lesquels j'ai eu la chance et le plaisir de travailler, en particulier Gert Vegter, qui a initié mon apprentissage de la rédaction mathématique, et Francis Lazarus, qui a aussi relu mon travail sur le théorème de Tutte.

Qu'il me soit aussi permis de remercier, à des titres variés, diverses personnes pour leur aide : mon oncle Yves Colin de Verdière, Robert Connelly, Michael Floater, Valérie Pham-Trong, Michael Starbird et Anne Verroust.

Je souhaite aussi remercier les personnes que j'ai côtoyées durant cette thèse, et dont l'aide a été précieuse. Merci à ceux qui ont partagé avec moi le bureau des thésards de l'équipe : Pierre Angelier, Xavier Goaoc et Laurent Rineau, qui m'ont aidé en programmation, et Luc Habert, arrivé récemment.

Je suis tout particulièrement reconnaissant envers tous ceux, famille, belle-famille et amis, qui m'ont encouragé et ont contribué à rendre ces années agréables. Enfin et surtout, merci à Mathilde pour son aide inestimable et son soutien, particulièrement lors de la rédaction de cette thèse.

Table des matières

Introduction

Décomposer, déformer, raccourcir en préservant la topologie

Décomposer, déformer et raccourcir sont des opérations élémentaires sur des objets géométriques. Ce mémoire porte sur ces trois opérations, avec un fil conducteur : nous voulons qu'elles préservent des propriétés topologiques de l'objet.

La topologie est un domaine assez récent de la géométrie : bien que des observations isolées aient été faites assez tôt dans cette discipline (la formule d'Euler était connue de Descartes, au XVII$^{\text{e}}$ siècle), c'est au milieu du XIX$^{\text{e}}$ siècle qu'elle a pris son essor (voir [45, p. 235], [98]). La topologie fait abstraction des caractéristiques métriques et projectives des objets telles que distance, aire, angle, alignement ; les propriétés topologiques sont celles qui découlent uniquement des notions de voisinage et de fonction continue. Une notion importante est celle d'homéomorphisme (application bijective bicontinue) : en topologie, deux objets homéomorphes (étymologiquement, qui ont la même forme) seront considérés comme étant identiques.

Nous allons donc considérer des décompositions, déformations et raccourcissements qui maintiennent et/ou mettent en évidence des propriétés topologiques.

Décomposer un objet, c'est le subdiviser en objets plus simples. Nous allons par exemple décomposer une surface en surfaces topologiquement plus simples, ou décomposer l'espace tridimensionnel en tétraèdres agencés de façon à épouser une forme donnée. Une telle décomposition permet d'appréhender la topologie de l'objet.

Déformer un objet en un autre, c'est trouver une transformation géométrique continue entre ces objets. Nous allons calculer des déformations préservant la topologie entre deux plongements d'un même graphe dans le plan.

Raccourcir un objet, c'est le transformer en un objet qui ait une « taille » aussi petite que possible. Nous allons raccourcir, par déformation, des courbes tracées sur des surfaces et des graphes plongés dans le plan.

Nos travaux sont de nature algorithmique : l'objectif est de calculer effectivement de telles opérations sur des objets géométriques. Ils sont plutôt théoriques, mais puisent leur motivation dans la manipulation d'objets géométriques, de plus en plus complexes, par l'ordinateur. On pense immédiatement aux modèles tridimensionnels qui foisonnent sur Internet et dans les jeux vidéo, mais il faut aussi évoquer le domaine de la conception assistée par ordinateur (CAO), dont les enjeux industriels sont très importants, la biologie, car la compréhension de la forme d'une molécule est un objectif crucial pour appréhender sa fonction [131], ou encore la robotique, où les mouvements des objets doivent être savamment orchestrés [87]. Décomposer un maillage, déformer un modèle polyédral en un autre, calculer des plus courts chemins, sont des problèmes qui se posent en pratique.

Raccourcissement de courbes et décomposition de surfaces

Notre contribution principale concerne le raccourcissement de courbes sur des surfaces en préservant des propriétés topologiques de ces courbes. Elle s'inscrit dans le domaine de la *topologie algorithmique*[1], terme apparu pour la première fois, à notre connaissance, dans un article de Vegter et Yap en 1990 [154]. Il s'agit d'une discipline de la *géométrie algorithmique*[2] qui se donne pour objectif « de cerner et de formaliser les questions topologiques dans les applications en informatique et d'étudier des algorithmes pour des problèmes de nature topologique » [51] (voir aussi [11, 153]). En d'autres termes, il est parfois légitime et fécond d'étudier les questions topologiques indépendamment de toute géométrie, avec un vocabulaire et des techniques propres (empruntés à la topologie algébrique et la topologie combinatoire, notamment), pour les remettre ensuite dans leur cadre géométrique.

Ce constat n'est peut-être pas nouveau, mais au moins s'en trouve-t-il formalisé et justifié. La topologie a toujours eu une place importante dans le domaine de la géométrie algorithmique. Les recherches menées sur les arrangements de droites [80] se portent naturellement sur la théorie des matroïdes orientés [17], qui en sont une axiomatisation topologique naturelle. Les *méthodes topologiques* [159] (homologie, théorèmes de point fixe et d'équipartition) permettent de résoudre des questions de géométrie discrète et algorithmique. Les problèmes de plongements d'un espace dans un autre ont aussi une forte composante topologique : plongements de graphes, théorie des nœuds et décidabilité de l'existence d'homéomorphismes. L'importance de la topologie se trouve renforcée actuellement, notamment à cause des applications (modélisation géométrique, maillages, biogéométrie) [51]. On peut donc considérer la topologie comme une caractéristique présente à des degrés divers dans tout problème de géométrie algorithmique.

La branche de la topologie algorithmique dans laquelle s'inscrit ce travail est l'étude algorithmique des surfaces et des courbes tracées sur celles-ci. Des questions fondamentales (déformation, homéomorphie, décomposition) se posent dans les applications en informatique et ont des liens étroits avec la topologie. Or les problèmes topologiques sous-jacents n'avaient pas été étudiés sur le plan algorithmique. On dispose depuis le début du XX^e siècle de théorèmes importants de topologie algébrique qui classent les surfaces à homéomorphisme près ou qui donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux courbes soient homotopes (admettent une transformation continue qui permet de passer de l'une à l'autre). Dans ces deux exemples, des résultats vieux d'une centaine d'années sont constructifs et permettent aussi de calculer effectivement un homéomorphisme entre deux surfaces ou une homotopie entre deux courbes. Mais il restait à don-

[1] computational topology, en anglais.
[2] computational geometry, en anglais.

ner des algorithmes efficaces pour ces problèmes et à étudier précisément leur complexité.

Notre étude concerne le *raccourcissement* (nous dirons aussi l'*optimisation*) de familles de courbes sur des surfaces en préservant certaines de leurs propriétés topologiques. Il s'agit donc d'une spécialisation du problème de calcul de plus courts chemins, problème fondamental en optimisation combinatoire [137, chapitres 6 à 9]. Plus précisément, étant donné un plongement de graphe sur une surface, nous cherchons le plus court plongement de graphe qui lui est isotope à sommets fixés ; étant donnée une famille de cycles simples et deux à deux disjoints, nous cherchons la plus courte famille de cycles simples et deux à deux disjoints dont les cycles soient homotopes aux cycles de la première famille. Nous nous proposons donc, en imposant la topologie, d'« améliorer » autant que possible la géométrie de ces courbes (chemins du plongement de graphe, ou cycles), au sens où le calcul d'une courbe aussi courte que possible parmi les courbes qui ont les mêmes propriétés topologiques a le mérite d'en fournir une représentation plus canonique.

Pour résoudre ce problème, nous utiliserons des *décompositions* de la surface en surfaces topologiquement élémentaires. Nous donnerons des algorithmes gloutons qui permettent de *raccourcir* les courbes de ces décompositions en maintenant des propriétés topologiques des courbes. Ces algorithmes fonctionnent dans un cadre où les courbes sont tracées sur le graphe sommets-arêtes d'une surface polyédrale. Nous montrerons que les courbes obtenues sont, individuellement (*i.e.*, indépendamment des autres courbes de la décomposition), des plus courtes courbes parmi les courbes sur le graphe sommets-arêtes qui leur sont topologiquement équivalentes. Ainsi, pour *optimiser* une courbe ou un ensemble de courbes, il nous suffira de compléter cet ensemble en une décomposition topologique de la surface, de *raccourcir* cette décomposition et de supprimer les courbes que nous avions ajoutées. Nous montrerons que cela mène à des algorithmes polynomiaux en leur entrée et en le rapport des poids extrêmes du graphe sommets-arêtes.

L'intérêt pratique de ce travail est de pouvoir raccourcir, non seulement une seule courbe sur une surface, mais aussi des décompositions de la surface en surfaces topologiquement élémentaires : découper une surface en un disque topologique (une région homéomorphe à un disque) constitue souvent la première étape du processus de *paramétrage*, qui vise à créer une correspondance entre une surface et une région du plan, et qui est un problème récurrent en infographie.

Autres contributions

Ce mémoire contient deux autres contributions.

La première, qui est le prolongement de notre travail de D.E.A., porte sur la *déformation* de plongements de graphes dans le plan et, dans une moindre mesure, sur leur *raccourcissement*. Contrairement au travail précédent, nous considérons ici des graphes plongés dans le plan de façon rectiligne, et ce sont les sommets qui vont se déplacer : on veut pouvoir créer une famille continue de plongements rectilignes (isotopie) entre deux plongements donnés. Étant donné un graphe planaire dont certains sommets sont fixés dans le plan, le théorème de plongement barycentrique de Tutte [152] fournit un moyen effectif et simple pour calculer le plongement qui minimise la somme des carrés des longueurs des arêtes parmi les plongements satisfaisant cette contrainte (*raccourcissement*). En faisant évoluer certains coefficients, on peut en fait créer une *déformation* entre deux plongements de graphe. Outre l'étude de ce processus de déformation, notre travail a consisté à donner une autre démonstration du théorème de Tutte et à réfuter sa généralisation naturelle en dimension supérieure. Le théorème de Tutte intervient souvent dans la seconde étape du processus de paramétrage : il permet de créer un homéomorphisme entre un disque topologique et une région du plan. La création de déformations à l'aide de ce théorème est motivée par la génération de *métamorphoses* (morphings) entre deux objets.

La dernière contribution de cette thèse concerne les triangulations de Delaunay conformes en trois dimensions (on devrait dire « tétraédrisations »). Étant donné un objet polyédral de l'espace tridimensionnel, nous voulons *décomposer* l'espace en simplexes (tétraèdres, triangles, arêtes et sommets) qui épousent la forme de l'objet, c'est-à-dire que chaque face de l'objet doit être une union de simplexes : nous dirons que la triangulation se *conforme* à cet objet polyédral. Nous imposons en outre que celle-ci soit la triangulation de Delaunay d'un ensemble fini de points (contenant en particulier les sommets de l'objet polyédral). Nous donnons un algorithme de calcul d'une telle triangulation de Delaunay conforme, où le nombre de points ajoutés est assez petit en pratique. La motivation de ce travail vient de la génération de maillages et de la modélisation géométrique, où il est souvent souhaitable de décomposer l'espace en cellules se conformant à un objet géométrique. L'intérêt des triangulations de Delaunay est que les formes des cellules sont souvent raisonnables et qu'elles présentent nombre de propriétés bien étudiées et exploitées dans ces domaines.

Organisation du document

Ce mémoire se compose de cinq chapitres.

Les trois premiers chapitres concernent l'optimisation de courbes sur des surfaces et la décomposition de surfaces. Le premier chapitre introduit les principales notions de topologie et de topologie combinatoire que nous utiliserons. Le deuxième chapitre présente un panorama des travaux antérieurs au nôtre, dans les domaines qui y sont reliés. Le troisième chapitre contient nos résultats sur le sujet.

Les deux derniers chapitres portent sur les deux autres travaux inclus dans cette thèse : au chapitre 4, nous revisitons le théorème barycentrique de Tutte, du point de vue de la déformation de plongements de graphe. Enfin, au chapitre 5, nous décrivons un algorithme de calcul de triangulations de Delaunay conformes en 3D.

Le chapitre 1 introduit des notions utilisées dans les chapitres 2 et 3, qui sont indépendants. Les chapitres 4 et 5 peuvent être lus chacun indépendamment du reste.

Le chapitre 3 étend les résultats et simplifie les démonstrations de [40] ; il reprend, avec des modifications mineures, l'article [41] ; il introduit de nouvelles techniques algorithmiquement plus simples à mettre en œuvre. Le contenu du chapitre 4 est paru dans [42] et dans une version préliminaire de cet article. Le chapitre 5 retranscrit presque textuellement l'article [38].

Chapitre 1

Topologie des surfaces

L'objectif de ce chapitre est de présenter les notions et résultats principaux de topologie utilisés dans les chapitres 2 et 3 de ce mémoire. Les démonstrations sont donc omises la plupart du temps. Le lecteur pourra, à sa guise, sauter ce chapitre et y revenir quand le besoin s'en fera sentir, le survoler, ou le lire intégralement. L'index indique en gras les pages de ce chapitre où les termes sont définis.

Nous renvoyons le lecteur intéressé aux ouvrages [92, 6], dédiés au sujet, assez élémentaires, et sur lesquels nous nous sommes appuyé pour la rédaction de ce chapitre ; sauf autre indication, on trouvera dans ces livres les démonstrations des résultats de ce chapitre. On pourra aussi consulter [145] pour un ouvrage abordant des thèmes plus variés, [114, 91] qui traitent davantage de topologie algébrique et [117] à propos de graphes plongés sur les surfaces.

1.1 Surfaces, courbes et plongements de graphes

Dans cette section, nous rappelons les notions habituelles de topologie des courbes et surfaces, ainsi que celle de graphe plongé.

1.1.1 Surfaces

Un *espace topologique* est un ensemble X muni d'une collection $\mathcal{O}$ de sous-ensembles de X, appelés *ouverts*, satisfaisant les trois axiomes suivants :

– l'ensemble vide et X sont des ouverts ;
– une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert ;
– une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Il n'y a, en particulier, aucune notion de métrique (distance, angle, aire) dans un espace topologique. En revanche, on peut, à partir de la notion de *voisinage* (un voisinage de $x \in X$ est un ensemble contenant un ouvert contenant x), définir la notion de continuité, de limite, de fonction continue, etc. Les espaces topologiques que nous considérons sont supposés *séparés*, c'est-à-dire que deux points distincts ont des voisinages disjoints. Si X et Y sont deux espaces topologiques, une application $f : X \to Y$ est un *homéomorphisme* si elle est continue, bijective et si sa réciproque f^{-1} est aussi continue.

Une *surface* est un espace topologique dans lequel chaque point a un voisinage homéomorphe au disque unité $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad x^2 + y^2 < 1\}$ ou au demi-disque unité $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad x^2+y^2 < 1, \quad x \geq 0\}$. Le *bord* d'une surface $\mathcal{M}$, noté $\partial\mathcal{M}$, est l'ensemble des points de cette surface qui n'ont pas de voisinage homéomorphe au disque unité. L'*intérieur* de $\mathcal{M}$ est le complémentaire de son bord.

Une surface est donc « abstraite » : la seule chose que l'on connaisse, ce sont les voisinages de chaque point. Une surface n'est pas nécessairement plongée dans l'espace $\mathbf{R}^3$.

Un espace topologique X est *compact* si tout ensemble d'ouverts dont la réunion est X admet un sous-ensemble fini qui recouvre encore X. Sauf mention contraire, les surfaces que nous considérons sont compactes.

1.1.2 Courbes, connexité et théorème de Jordan–Schönflies

Soit X un espace topologique. Un *chemin* dans X est une application continue $p : [0, 1] \to X$; ses *extrémités* sont $p(0)$ et $p(1)$. Un chemin est *simple* s'il est injectif. Un *chemin fermé* dans X, ou *lacet*, est un chemin dont les extrémités coïncident ; celles-ci sont appelées le *point-base* du lacet. Un lacet ℓ est *simple* si $\ell|_{[0,1[}$ est injectif. L'*intérieur relatif* d'un chemin $p : [0, 1] \to X$ (éventuellement fermé) est l'application $p|_{]0,1[}$.

Un *chemin infini* dans X est une application continue $p : \mathbf{R} \to X$; il est simple s'il est injectif ; son *intérieur relatif* est le chemin infini lui-même.

Un *cycle* est une application continue $\gamma : S^1 \to X$ (où S^1 désigne le cercle unité). Un cycle diffère d'un lacet en ce que le lacet a des extrémités (confondues) ; sur un cycle, aucun point n'est distingué. Un cycle γ est *simple* si γ est injectif. L'intérieur relatif d'un cycle est le cycle lui-même. Il est parfois commode de voir un cycle comme étant un chemin infini $\gamma : \mathbf{R} \to X$ tel que $\gamma(.) = \gamma(1 + .)$. Si γ est un cycle (vu comme application de $\mathbf{R}$ dans X), les *lacets associés à* γ sont les lacets de la forme $\gamma(x + .)|_{[0,1]}$, où $x \in \mathbf{R}$.

Une *courbe* désigne un chemin, fermé ou non, un chemin infini, ou un cycle. L'*image* d'une courbe $c : I \to X$ est l'ensemble $c(I) \subset X$. Nous utiliserons parfois l'abus de notation qui consiste à confondre une courbe et son image.

Soit X un espace topologique. X est dit *connexe*[1] si, pour tous points a et b de X, il existe un chemin dans X d'extrémités a et b. Si X est connexe, nous dirons qu'une courbe c *sépare* X si $X \setminus c$ n'est pas connexe. Les *composantes connexes* d'un espace topologique X sont les classes de la relation d'équivalence sur X définie par : a est équivalent à b s'il existe un chemin entre a et b.

Théorème 1.1 (Jordan–Schönflies — voir [148]) *Soit γ un cycle simple dans $\mathbf{R}^2$. Alors il existe un homéomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ tel que l'image de γ par cet homéomorphisme est le cercle unité $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.*

La figure 1.1 illustre ce théorème. En particulier, tout cycle simple dans $\mathbf{R}^2$ sépare $\mathbf{R}^2$ en deux composantes connexes (*théorème de Jordan*).

[1] Dans ce mémoire, le seul type de connexité considéré est la connexité par arcs.

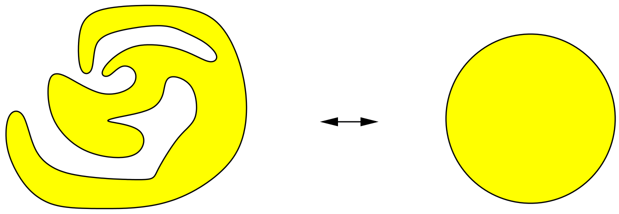


FIG. 1.1 – Illustration du théorème de Jordan–Schönflies.

1.1.3 Graphes et plongements de graphes

Un *graphe* $G = (V, E)$ est la donnée d'un ensemble de *sommets* V et d'un ensemble d'*arêtes* E, chaque arête ayant deux sommets (éventuellement confondus) qui sont ses *extrémités*. Il existe de nombreuses variantes de la notion de graphe :

- le graphe peut être *orienté* (chaque arête e a un sommet initial et un sommet terminal) ou non (les deux extrémités de chaque arête ne sont pas distinguées) ;
- les *arêtes multiples* peuvent être autorisées ou non (c'est-à-dire le fait que plusieurs arêtes puissent avoir les mêmes extrémités) ;
- les *boucles* (c'est-à-dire les arêtes ayant leurs extrémités confondues) peuvent être autorisées ou non ;
- le graphe peut être *fini* (au sens où V et E sont des ensembles finis) ou non.

À partir de la notion de graphe, on définit les notions d'*incidence* entre un sommet et une arête, d'*adjacence* entre deux sommets, de *degré* d'un sommet, de *connexité* du graphe, de *chemin* et de *chemin fermé*. Nous supposerons toutes ces notions connues, renvoyant le lecteur par exemple à [44, section 5.4] ou [20]. Signalons que, dans ce mémoire, les arêtes multiples et les boucles seront autorisées sauf mention contraire, et que les graphes considérés seront finis dans l'immense majorité des cas.

Nous introduisons maintenant la notion de *plongement* d'un graphe $G = (V, E)$ dans un espace topologique X, qui est une façon de représenter G à l'aide de points pour ses sommets et de chemins pour ses arêtes. Plus précisément, c'est la donnée de deux applications :

- Γ_V qui associe à chaque sommet de G un point de X ;
- Γ_E qui associe à chaque arête e de G un chemin dans X entre les images par Γ_V des extrémités de e,

de sorte que :

- l'application Γ_V est injective (deux sommets distincts sont envoyés sur des points distincts de X) ;
- pour toute arête e, l'intérieur relatif de $\Gamma_E(e)$ est injectif (l'image d'une arête est un chemin simple, sauf possiblement en ses extrémités) ;
- pour toutes arêtes distinctes e et e', $\Gamma_E(e)$ et $\Gamma_E(e')$ ont leurs intérieurs relatifs disjoints (les arêtes ne se croisent pas) ;
- pour toute arête e et pour tout sommet v, l'intérieur relatif de $\Gamma_E(e)$ ne rencontre pas $\Gamma_V(v)$ (aucune arête ne passe par un sommet).

Les *faces* d'un plongement de graphe sont les composantes connexes du complémentaire de l'image des sommets et arêtes de ce graphe. Un graphe est dit

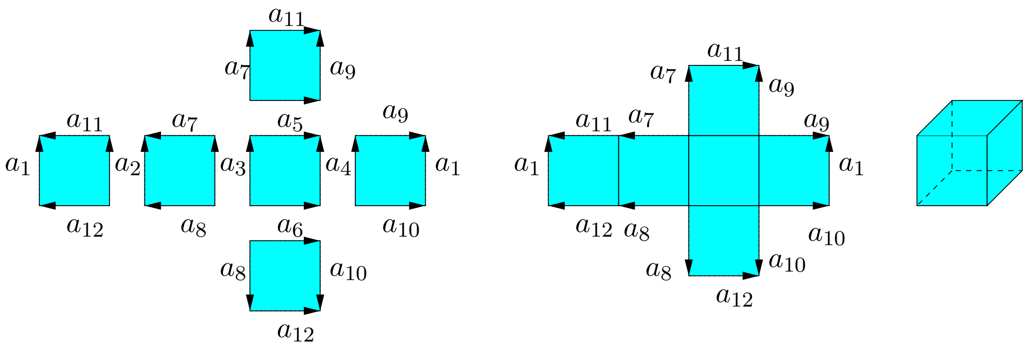


FIG. 1.2 – Construction d'une surface polyédrale (un cube) à partir de six carrés.

planaire s'il admet un plongement dans $\mathbf{R}^2$.

1.2 Surfaces polyédrales

1.2.1 Définition et propriétés

Nous allons donner un moyen de construire des surfaces, par recollement de polygones le long de leurs arêtes.

Considérons un espace topologique consistant en une union disjointe P de polygones simples (c'est-à-dire sans trou, ou encore homéomorphes au disque unité fermé). Choisissons une orientation des arêtes des polygones de P et soit $A = (A_1, \ldots, A_n)$ une partition de ces arêtes. On peut alors créer l'espace quotient P' obtenu à partir de P par *identification*, ou *recollement*, des arêtes de A_i pour tout i (en suivant les orientations choisies). Cet ensemble peut être naturellement muni d'une topologie [92, p. 116]. Nous dirons que les n *arêtes* de P' sont les ensembles $A_1, \ldots, A_n$. Cette identification d'arêtes induit naturellement une identification sur les sommets des polygones de P : deux sommets sont identifiés sur la surface s'ils sont les extrémités initiales, ou terminales, de deux arêtes de P appartenant à un même ensemble A_i.

L'espace topologique P' n'est pas nécessairement une surface, parce que les identifications peuvent créer des points qui n'ont aucun voisinage homéomorphe au disque ou au demi-disque unité. La définition suivante vise à exclure de tels cas.

Une *surface polyédrale* est un espace topologique obtenu par identifications d'arêtes et de sommets d'un ensemble fini de polygones simples (appelés *faces* de la surface polyédrale), de sorte que :
- l'espace ainsi obtenu est une surface ;
- deux arêtes ou deux sommets distincts d'un même polygone ne sont pas identifiés sur la surface ;
- l'intersection de deux polygones distincts est soit vide, soit un sommet commun, soit une arête commune.

Voir la figure 1.2.

Cela implique en particulier :

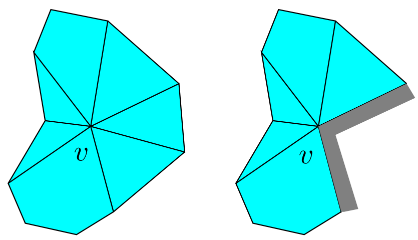


Fig. 1.3 – Les polygones incidents à un sommet v peuvent être ordonnés cycliquement (si v est un point intérieur à la surface) ou linéairement (si v est un point sur le bord).

- qu'une arête est incidente à deux polygones (ou à un polygone si elle est sur le bord de la surface) ;
- que pour tout sommet v, les polygones qui ont un sommet v en commun peuvent être ordonnés en une suite cyclique $P_1, P_2, \ldots, P_k, P_1$ ou linéaire $P_1, P_2, \ldots, P_k$, de sorte que deux polygones adjacents dans cette suite sont identifiés le long d'une arête incidente à v (figure 1.3).

Une surface polyédrale est une surface. La réciproque n'est pas évidente :

Théorème 1.2 (voir [148] ou [57]) *Toute surface (compacte) est homéomorphe à une surface polyédrale.*

Cela revient à dire que, sur chaque surface compacte, on peut plonger un graphe fini $G = (V, E)$ (sans boucles ni arêtes multiples) tel que :
- chaque face de G est homéomorphe au disque unité ouvert et incidente à au moins trois arêtes ;
- le bord de chaque face est constitué d'un cycle alterné de sommets et d'arêtes tous distincts ;
- les adhérences de deux faces distinctes sont disjointes, ou ont un sommet commun ou une arête commune.

Ce théorème implique que, pour étudier la topologie des surfaces, il suffit de se restreindre aux surfaces polyédrales.

Le *graphe sommets-arêtes* d'une surface polyédrale est le graphe induit par les sommets et les arêtes de la surface polyédrale. Une *surface combinatoire*, ou *surface triangulée*, est une surface polyédrale dont les faces sont des triangles. Un homéomorphisme entre une surface triangulée et une surface $\mathcal{M}$ fournit une *triangulation* de $\mathcal{M}$. Comme tout polygone peut être triangulé, toute surface admet une triangulation.

1.2.2 Découpage de surfaces

Le théorème de Jordan–Schönflies permet de définir rigoureusement ce que l'on appelle *découpage* d'une surface $\mathcal{M}$ le long d'une courbe simple c. Tout repose sur le lemme suivant :

Lemme 1.3 *Soit $\mathcal{M}$ une surface et soit c un chemin simple, fermé ou non, dont l'intérieur relatif est dans l'intérieur de $\mathcal{M}$. Alors il existe une triangulation T de*

$\mathcal{M}$ telle que l'image de c est un chemin (simple) dans le graphe sommets-arêtes de T.

Montrer l'existence de T est assez facile si l'on arrive à trouver une triangulation de $\mathcal{M}$ dont le graphe sommets-arêtes intersecte c en un nombre fini de points, car il suffit alors de subdiviser chaque triangle t le long de chaque morceau de c qui traverse t (un tel morceau sépare en effet t en vertu du théorème de Jordan). Mais la difficulté réside dans le fait qu'il faut se débarrasser du nombre potentiellement infini d'intersections. Ce lemme peut être démontré en adaptant les démonstrations du fait que toute surface compacte est triangulable (par exemple la démonstration de [57]).

Epstein [67, annexe] énonce un théorème un peu différent, mais sa méthode permet en particulier de montrer ce résultat. Fixons une triangulation de $\mathcal{M}$. L'idée est de prendre des réels $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = 1$, de sorte que, pour tout i, $c|_{[a_i,a_{i+1}]}$ est inclus dans un disque, et de montrer par récurrence sur i, en utilisant le théorème de Jordan–Schönflies, qu'il existe un homéomorphisme de $\mathcal{M}$ qui envoie $c|_{[0,a_i]}$ sur une courbe affine par morceaux (vis-à-vis de la triangulation de départ).

Ce lemme permet en particulier de définir ce qu'est l'espace obtenu par *découpage* de $\mathcal{M}$ le long d'un chemin simple c : soit T une triangulation donnée par le lemme 1.3 ; on définit cet espace comme étant la surface combinatoire définie à partir de T en retirant les identifications des arêtes par lesquelles passe c. En itérant le procédé, on peut découper la surface le long d'un plongement de graphe dont les arêtes ont leurs intérieurs relatifs dans l'intérieur de $\mathcal{M}$.

Dans le chapitre 3, nous utiliserons constamment le découpage d'une surface le long d'une courbe simple ou de plusieurs courbes simples et deux à deux disjointes.

1.3 Classification et décomposition des surfaces

1.3.1 Invariants topologiques

Nous introduisons ici des quantités que l'on calcule pour une surface polyédrale S, mais qui sont des *invariants topologiques*, en ce sens que, si S et S' sont des surfaces homéomorphes, alors ces quantités sont égales pour S et S'. Deux exemples triviaux d'invariants topologiques d'une surface polyédrale S sont le nombre de composantes connexes de S et le nombre de bords de S (plus précisément, le nombre de composantes connexes du bord de S) : il est évident que ces quantités dépendent en fait seulement de la surface $\mathcal{M}$ sous-jacente.

Soit S une surface polyédrale. Le bord d'un polygone de S est un cycle d'arêtes, qui peut être orienté de deux façons différentes. Un choix d'orientation de ce polygone donne une orientation des arêtes de son bord. S est *orientable* s'il est possible d'orienter chacun de ses polygones de sorte que chaque arête incidente à deux polygones soit orientée de façons contraires par ces deux polygones (figure 1.4) ; si c'est possible, un tel choix d'orientation des faces s'appelle une *orientation* de la surface, qui est alors dite *orientée*.

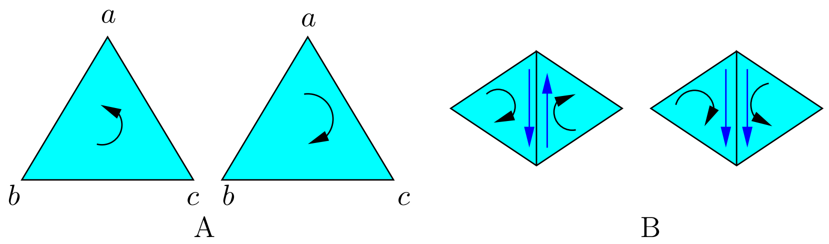


FIG. 1.4 – Définition de l'orientabilité d'une surface. A : les deux orientations possibles pour un triangle *abc*. B : À gauche, l'arête incidente aux deux triangles est orientée de deux façons contraires. À droite, les orientations de l'arête induites par les deux triangles sont les mêmes.

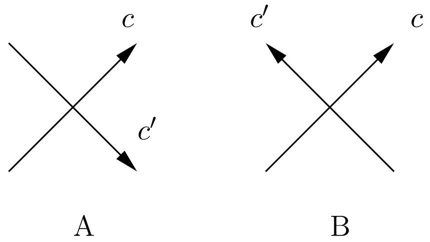


FIG. 1.5 – Deux orientations de croisements entre deux courbes c et c'. A : c' perce c de la gauche vers la droite. B : c' perce c de la droite vers la gauche.

Soient deux courbes c et c' sur une surface, ayant pour intersection un unique point p. Nous dirons que c et c' se *croisent* s'il existe un voisinage U de p et un homéomorphisme de ce voisinage dans le disque unité qui envoie $c \cap U$ et $c' \cap U$ sur deux segments sécants. Sur une surface orientée, on peut définir sans ambiguïté l'orientation d'un croisement entre c et c' (figure 1.5).

Soit S une surface polyédrale ayant s sommets, a arêtes et f faces. La *caractéristique d'Euler* de S, notée $\chi(S)$, est l'entier relatif $s - a + f$.

Théorème 1.4 *Soient S et S' deux surfaces polyédrales homéomorphes. Alors :*
- *S est orientable si et seulement si S' l'est ;*
- *$\chi(S) = \chi(S')$.*

En d'autres termes, la caractéristique d'Euler et l'orientabilité sont des invariants topologiques. Donnons l'idée d'une démonstration. Étant donnée une surface polyédrale, on peut *raffiner* une ou plusieurs de ses faces, en les subdivisant en faces plus petites. Il est facile de voir qu'une telle subdivision ne change pas l'orientabilité de la surface ni sa caractéristique d'Euler (figure 1.6). Pour démontrer le théorème précédent, il suffit de montrer que S et S' peuvent être raffinées de sorte que ces raffinements soient les mêmes. On peut représenter S et S' comme des graphes G et G' plongés sur une même surface $\mathcal{M}$ (voir la section précédente). Si G et G' s'intersectent en un nombre fini de points, on conçoit assez bien que l'on puisse trouver une subdivision commune pour G et G'. Ce qui rend la démonstration difficile est qu'*a priori* G et G' peuvent avoir un nombre infini d'intersections. On peut néanmoins démontrer que G et G' admettent des subdivisions combinatoirement équivalentes.

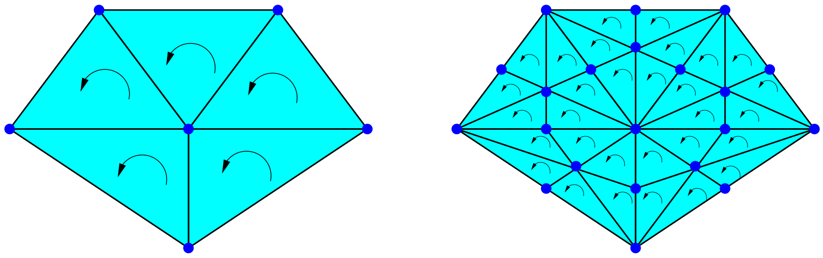


FIG. 1.6 – Une subdivision de la surface ne change pas son orientabilité ni sa caractéristique d'Euler.

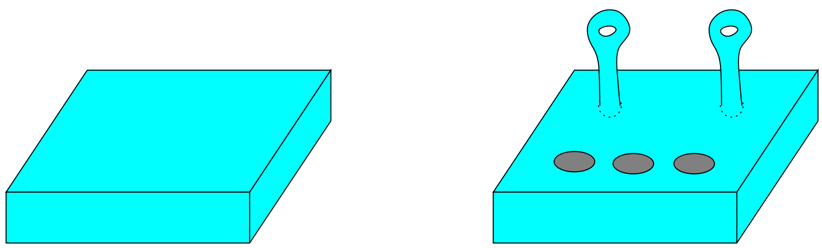


FIG. 1.7 – Toute surface compacte est homéomorphe à une sphère (ici, un parallélépipède) auquel on a ajouté g poignées et retiré b disques ouverts. Ici, $g = 2$ et $b = 3$.

Toutes les surfaces considérées dans ce mémoire sont orientables, et nous omettons souvent cet adjectif.

1.3.2 Théorème de classification et schémas polygonaux

1.3.2.1 Théorème de classification

Nous avons donné dans la section précédente des invariants topologiques : deux surfaces polyédrales ayant des invariants différents ne peuvent être homéomorphes. Réciproquement, deux surfaces ayant les mêmes invariants sont-elles homéomorphes ? Le théorème fondamental suivant classe les surfaces à homéomorphisme près :

Théorème 1.5 (Théorème de classification des surfaces) *Soit $\mathcal{M}$ une surface compacte, connexe, orientable. Il existe deux entiers positifs ou nuls g et b, uniques, tels que $\mathcal{M}$ est homéomorphe à une sphère à laquelle on a collé g poignées et à laquelle on a retiré b disques deux à deux disjoints. De plus, $\chi(\mathcal{M}) = 2 - 2g - b$.*

La figure 1.7 illustre ce théorème.

En particulier, le nombre de bords b et la caractéristique d'Euler caractérisent la classe d'homéomorphie d'une surface compacte connexe orientable. L'entier g est donc un invariant topologique, appelé le *genre* de la surface. Une autre conséquence de ce théorème est que les surfaces compactes orientables sont toutes plongeables dans $\mathbf{R}^3$.

Voici les valeurs de g et b pour quelques surfaces simples (figure 1.8) :

– pour une sphère, $g = 0$ et $b = 0$;

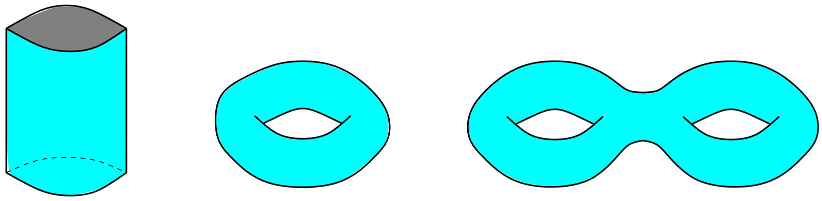


FIG. 1.8 – De gauche à droite : un cylindre, un tore et un double-tore.

– pour un disque, $g = 0$ et $b = 1$;
– pour un cylindre, $g = 0$ et $b = 2$;
– pour un tore, $g = 1$ et $b = 0$;
– pour un double-tore, $g = 2$ et $b = 0$.

Nous dirons qu'une surface est une *sphère* (resp. un *disque*) *topologique* si elle est homéomorphe à une sphère (resp. à un disque).

1.3.2.2 Ébauche de démonstration et schémas polygonaux

Nous allons donner la méthode de la démonstration, qui est instructive. Au cours de celle-ci, nous introduirons les notions de *schéma polygonal*, *schéma polygonal réduit* et *schéma polygonal canonique*, qui sont des familles de courbes décomposant la surface en un disque. L'origine de la démonstration se trouve dans l'article de Brahana [21] ; la plupart des ouvrages de topologie donnent cette démonstration (voir par exemple [74, chapitre 4]). D'après le théorème 1.2, on peut supposer que $\mathcal{M}$ est une surface polyédrale. La première étape de la démonstration consiste à montrer que $\mathcal{M}$ admet un schéma polygonal, c'est-à-dire un *patron*.

Un *schéma polygonal* d'une surface connexe $\mathcal{M}$ est la donnée d'un polygone simple avec une identification de ses côtés (choix d'une orientation des arêtes et partition de celles-ci), de sorte que l'on obtient la surface $\mathcal{M}$ en procédant à ces identifications. L'intérêt d'un schéma polygonal est qu'il définit une surface d'une façon particulièrement simple : il suffit de donner la liste des arêtes du bord du polygone en indiquant quelles identifications doivent être faites (voir les figures 1.9 et 1.10, ainsi que la figure 1.2, au milieu). Dans le cas d'une surface à bord, les arêtes du schéma polygonal correspondant aux arêtes du bord ne sont pas appariées.

Tout graphe plongé sur $\mathcal{M}$, qui a exactement une face et tel que cette face est un disque topologique, donne naissance à un schéma polygonal de $\mathcal{M}$ par découpage de ce graphe le long de ses arêtes (voir les figures 1.9 et 1.10). Par abus de langage, nous aurons tendance à dire qu'un tel graphe est un schéma polygonal de $\mathcal{M}$.

Intuitivement, toute surface polyédrale connexe $\mathcal{M}$ admet un schéma polygonal, construit en supprimant autant d'identifications d'arêtes que possible et en maintenant le fait que la surface est connexe. Formellement, considérons le *graphe dual* $G^* = (V^*, E^*)$ du graphe sommets-arêtes $G = (V, E)$ de $\mathcal{M}$: il s'agit du graphe dont les sommets sont les faces de $\mathcal{M}$ et tel que deux sommets sont reliés par une arête si les faces correspondantes de la surface polyédrale sont adja-

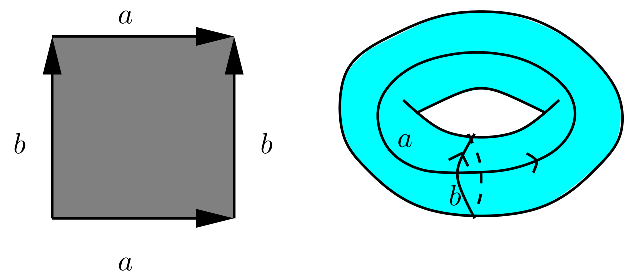


FIG. 1.9 – À gauche, un schéma polygonal du tore. À droite, la surface obtenue après identification des arêtes du bord du schéma. Le schéma polygonal peut s'écrire sous la forme $ab\bar{a}\bar{b}$ (dans le sens trigonométrique).

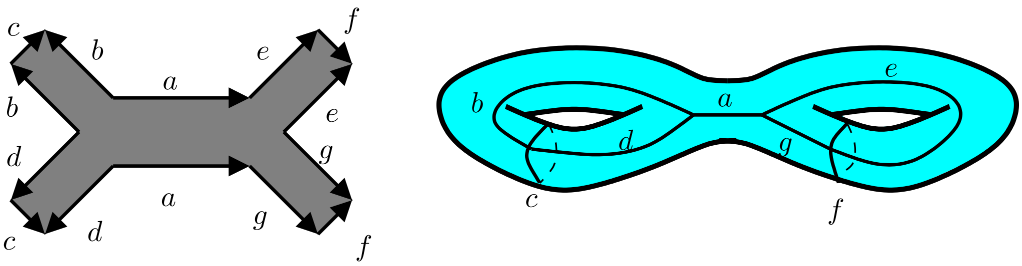


FIG. 1.10 – À gauche, un schéma polygonal du double-tore, de la forme $\bar{a}bc\bar{c}\bar{b}dc\bar{d}agf\bar{g}e\bar{f}\bar{e}$. À droite, la surface obtenue après identification des arêtes du bord du schéma.

centes (figure 1.11). Le graphe dual de $\mathcal{M}$ est connexe ; si l'on en calcule un *arbre couvrant* T^* et qu'on supprime toutes les identifications d'arêtes dans la surface polyédrale sauf celles qui correspondent à des arêtes de T^*, on obtient un schéma polygonal (figure 1.11D).

Le reste de la démonstration consiste à transformer le schéma polygonal pour arriver à montrer que la surface admet un schéma polygonal d'une forme bien particulière. Ces opérations élémentaires sont des opérations de *découpage–collage* : on découpe le schéma polygonal en deux morceaux, que l'on recolle ensuite le long d'arêtes qui doivent être identifiées sur la surface, de sorte que cette opération ne modifie pas la surface elle-même. Voir la figure 1.12. Par de telles opérations, on se ramène à un *schéma polygonal réduit* puis à un *schéma polygonal canonique.*

Supposons la surface $\mathcal{M}$ sans bord ; un *schéma polygonal réduit* de $\mathcal{M}$ est un schéma polygonal de $\mathcal{M}$ dans lequel tous les sommets du bord du schéma sont identifiés sur un seul point de la surface[2]. Après identification des arêtes du schéma polygonal, on obtient un ensemble de chemins fermés, simples et deux à deux disjoints sauf en un sommet v_0, où ils se rencontrent tous ; le complémentaire dans $\mathcal{M}$ de ces chemins fermés donne un disque topologique. Un tel ensemble de lacets s'appelle un *système fondamental de lacets* et v_0 est le *point-base* de ce système.

[2]Notons que cette notion est indépendante d'une triangulation de $\mathcal{M}$. En particulier, les chemins d'un schéma polygonal ne sont pas nécessairement inclus dans le graphe sommets-arêtes de $\mathcal{M}$, quand $\mathcal{M}$ est polyédrale.

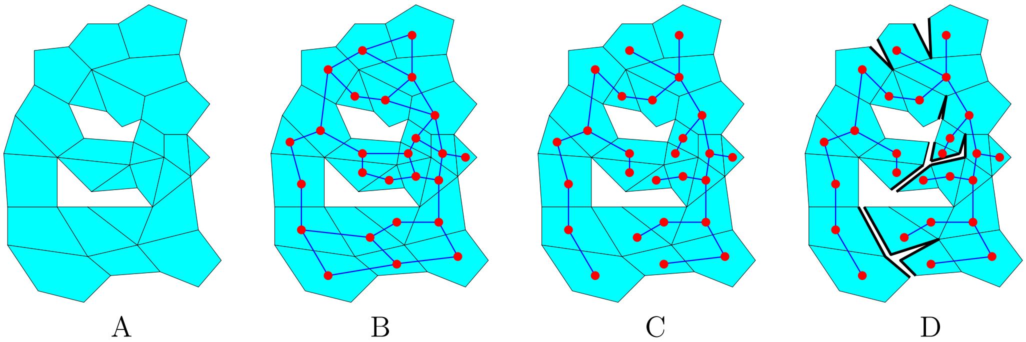


FIG. 1.11 – La création d'un schéma polygonal à partir d'une surface polyédrale (ici, à trois bords et de genre nul). A : La surface. B : Le graphe dual G^* du graphe sommets-arêtes. C : Un arbre couvrant T^* de ce graphe. D : Découpage de la surface le long des arêtes duales de $G^* \setminus T^*$. Les arêtes en traits gras doivent être identifiées par paires pour obtenir à nouveau la surface.

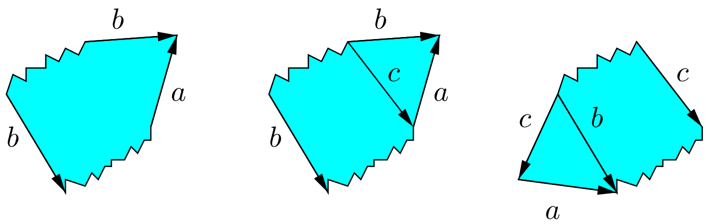


FIG. 1.12 – Chirurgie d'un schéma polygonal.

Il n'y a pas de définition standard de schéma réduit pour une surface à bord. Nous prendrons la définition suivante : si $\mathcal{M}$ a au moins un bord, un *schéma réduit* sur $\mathcal{M}$ est un schéma polygonal tel que, après identification des arêtes et sommets, chaque bord de $\mathcal{M}$ contient exactement un sommet du schéma et tel qu'il y a au plus un sommet hors du bord de $\mathcal{M}$. Tout schéma polygonal peut être transformé en un schéma polygonal réduit.

Un *schéma polygonal canonique* d'une surface $\mathcal{M}$ est un schéma polygonal dans lequel le bord du polygone est de la forme

$$a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \ \ldots \ a_g b_g \bar{a}_g \bar{b}_g \ c_1 d_1 \bar{c}_1 \ \ldots \ c_b d_b \bar{c}_b \quad \text{ou} \quad a\bar{a}, \tag{1.1}$$

où $(g, b) \in \mathbf{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. (Les arêtes d_i ne sont pas appariées et correspondent donc au bord de la surface.) Le cas particulier $a\bar{a}$ correspond au cas où la surface considérée est la sphère. Voir la figure 1.13 pour un exemple de schéma canonique d'une sphère à 4 bords, et la figure 1.14 pour un exemple sur le double-tore. On montre que tout schéma canonique est réduit, et que tout schéma réduit peut être transformé en un schéma canonique.

Ainsi, toute surface compacte, connexe, orientable est homéomorphe à la surface obtenue par recollement d'un schéma polygonal défini par la formule (1.1), pour un certain couple $(g, b) \in \mathbf{N}^2$ (par convention, $g = b = 0$ si le schéma est de la forme $a\bar{a}$). On montre que la caractéristique d'Euler d'une telle surface est $2 - 2g - b$, et qu'une sphère à laquelle on recolle g poignées et supprime b disques ouverts disjoints admet un schéma polygonal canonique défini par la formule (1.1).

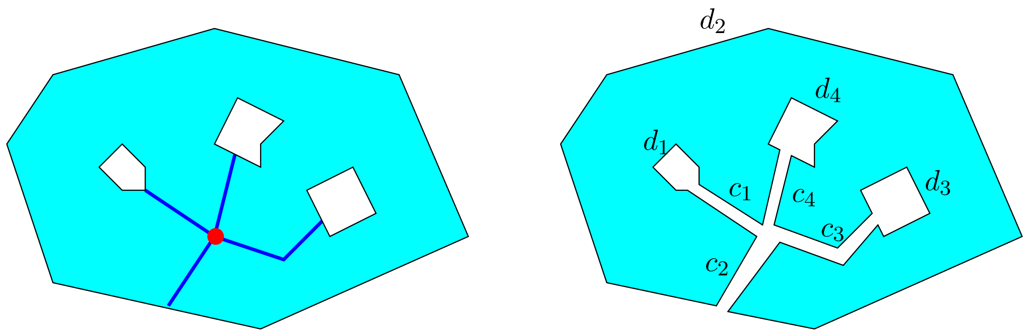
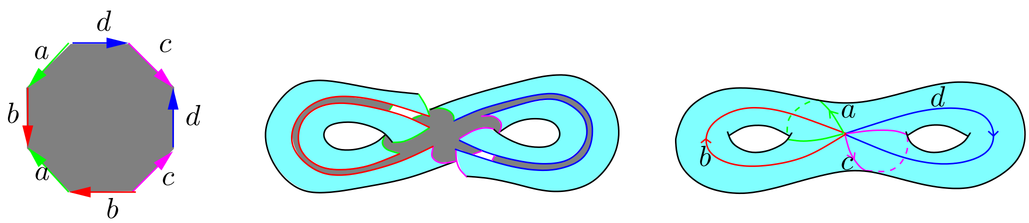


FIG. 1.13 – Un schéma polygonal canonique sur une sphère à 4 bords.



A B C

FIG. 1.14 – A : Un schéma polygonal canonique d'un double-tore. B : L'identification des arêtes de ce schéma. C : On obtient ainsi un double-tore sur lequel se trouvent un ensemble de lacets simples et deux à deux disjoints sauf en un point commun, tel que le découpage de la surface donne un disque topologique : un *système fondamental de lacets* du double-tore.

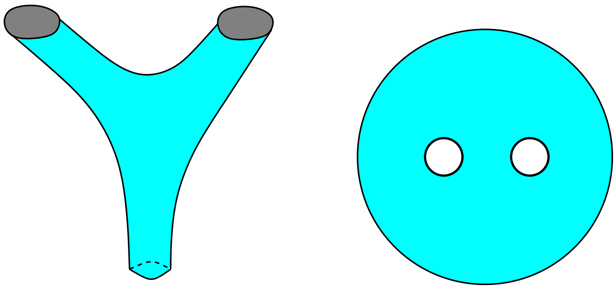


FIG. 1.15 – Deux représentations d'un pantalon.

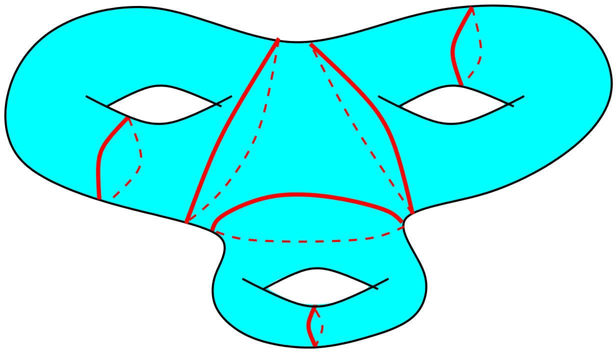


FIG. 1.16 – Une décomposition en pantalons d'un triple-tore.

Étant donnée une surface compacte, orientable, ayant un nombre k de composantes connexes, son *genre* g est la somme des genres de ses composantes connexes, et son *nombre de bords* b est la somme des nombres de bords de ses composantes connexes. En utilisant le théorème précédent, on voit que la caractéristique d'Euler d'une telle surface est $2k - 2g - b$.

1.3.3 Décompositions en pantalons

Nous introduisons maintenant un autre type de décomposition de surfaces, que nous utiliserons dans le chapitre 3. Un *pantalon* est une surface de genre 0 et à 3 bords (figure 1.15). Une *décomposition en pantalons* (voir [90] ou [149, p. 269]) de $\mathcal{M}$ est un ensemble de cycles simples et deux à deux disjoints tel que le découpage de $\mathcal{M}$ le long de ces cycles donne des pantalons (figure 1.16). Toute surface compacte, connexe, orientable, de caractéristique d'Euler strictement négative (ce qui exclut la sphère, le disque, le cylindre et le tore) admet des décompositions en pantalons. On peut créer une décomposition en pantalons d'une surface en découpant itérativement celle-ci le long d'un *cycle essentiel*, c'est-à-dire un cycle simple tel qu'aucune composante connexe de la surface découpée le long de ce cycle n'est un disque ou un cylindre. Une décomposition en pantalons est constituée de $3g+b-3$ cycles.

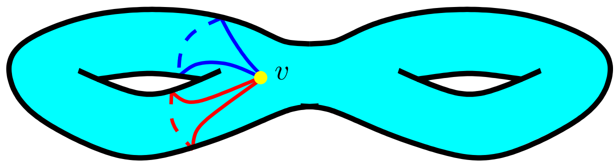


FIG. 1.17 – Les deux cycles sur ce double-tore sont librement homotopes, mais pas homotopes si on les considère comme des lacets de point-base v.

1.4 Homotopie, isotopie et revêtement universel

Les notions d'homotopie et d'isotopie permettent de déterminer si l'on peut *déformer* une courbe en une autre. Le revêtement universel est un espace qui permet de faire des calculs d'homotopie.

1.4.1 Homotopie

Soient p et q deux chemins sur une surface $\mathcal{M}$. On définit la *concaténation* de p et q, notée $p.q$, comme étant le chemin défini par :

- $(p.q)(t) = p(2t)$, si $0 \leqslant t \leqslant 1/2$;
- $(p.q)(t) = q(2t-1)$, si $1/2 \leqslant t \leqslant 1$.

Un *reparamétrage* d'un chemin p est un chemin de la forme $p \circ \varphi$, où $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ est bijective et croissante. Si les chemins sont considérés à reparamétrage près, l'opération de concaténation est associative. L'*inverse* d'un chemin p, noté p^{-1}, est l'application $t \mapsto p(1-t)$.

La notion d'homotopie correspond à l'idée intuitive de déformation. Deux chemins p et q sur $\mathcal{M}$, ayant tous deux pour extrémités a et b, sont *homotopes* s'il existe une famille continue de chemins d'extrémités a et b entre p et q. Plus formellement, une *homotopie* entre p et q est une application continue $h : [0,1] \times [0,1] \to \mathcal{M}$ telle que $h(0,.) = p$, $h(1,.) = q$, $h(.,0) = a$ et $h(.,1) = b$. On peut en particulier appliquer cette définition à des lacets.

Deux cycles γ et γ' sont *homotopes* s'il existe une famille continue de cycles joignant γ à γ', c'est-à-dire une application continue $h : [0,1] \times S^1 \to \mathcal{M}$ telle que $h(0,.) = \gamma$ et $h(1,.) = \gamma'$.

L'homotopie de cycles (aussi appelée *homotopie libre*) et l'homotopie de lacets (aussi appelée *homotopie à point-base fixé*) sont deux relations d'équivalence qui sont bien différentes, voir la figure 1.17 pour un exemple. Un lacet (resp. un cycle) est *contractile* s'il est homotope à un lacet (resp. à un cycle) constant.

Soit v_0 un point de $\mathcal{M}$. La relation « être homotope à » partitionne l'ensemble des lacets de point-base v_0 en *classes d'homotopie*. Notons $[\ell]$ la classe d'homotopie d'un lacet ℓ. On peut munir l'ensemble des classes d'homotopie de la loi « . » définie par $[\ell].[\ell'] = [\ell.\ell']$, et cette loi fait de l'ensemble des classes d'homotopie de lacets de point-base v_0 un groupe, appelé *groupe fondamental* de $(\mathcal{M}, v_0)$ et noté $\pi_1(\mathcal{M}, v_0)$ ou plus brièvement $\pi_1(\mathcal{M})$, dont l'élément neutre est la classe des lacets contractiles.

En particulier, le groupe fondamental du disque ou de la sphère est trivial : deux chemins ayant les mêmes extrémités sont homotopes. Celui du cylindre est

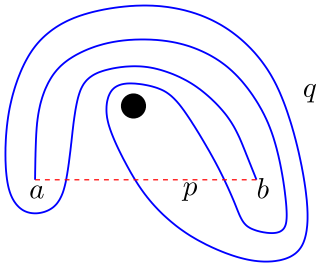


FIG. 1.18 – Deux chemins simples qui sont homotopes ne sont pas nécessairement isotopes. Ici, la surface considérée est le plan privé d'un disque ; les chemins p (en traits pointillés) et q (en traits pleins), qui ont comme extrémités a et b, sont simples, homotopes, mais pas isotopes.

$\mathbf{Z}$ (donner la classe d'homotopie d'un lacet revient à donner le nombre de tours algébrique qu'il fait autour du trou), celui du tore est $\mathbf{Z}^2$. (Celui du pantalon est le groupe libre à deux générateurs.)

Le groupe fondamental donne une interprétation de la relation d'homotopie libre, de la façon suivante. On démontre facilement que deux cycles γ et γ' sont homotopes si et seulement si, pour deux lacets ℓ et ℓ' associés respectivement à γ et γ', il existe un chemin β joignant $\ell(0)$ à $\ell'(0)$ de sorte que le lacet $\beta^{-1}.\ell.\beta.\ell'^{-1}$ est contractile. Deux lacets ℓ et ℓ' de point-base v_0 sont donc homotopes *en tant que cycles* si $[\ell]$ et $[\ell']$ sont *conjugués* dans le groupe fondamental.

1.4.2 Isotopie

Une *isotopie* h entre deux courbes (chemins, lacets ou cycles) simples est une homotopie telle que les courbes restent simples durant la déformation : pour tout $t \in [0, 1]$, $h(t, .)$ doit être une courbe (chemin, lacet ou cycle) simple.

Pour des courbes simples, les notions d'homotopie et d'isotopie sont très proches mais non confondues. Deux chemins simples homotopes ne sont pas nécessairement isotopes, comme le montre un contre-exemple dû à Feustel [71], présenté figure 1.18. Il y a néanmoins des cas où deux chemins simples homotopes sont nécessairement isotopes :

Lemme 1.6 *Soient D un disque fermé, et c_1 et c_2 deux chemins simples dans D ayant les mêmes extrémités, qui intersectent le bord de D précisément en leurs extrémités. Alors c_1 et c_2 sont isotopes dans l'intérieur de D auquel on ajoute les extrémités de c_1.*

Ce résultat est une conséquence simple du théorème de Jordan–Schönflies (et même triviale si les intérieurs relatifs de c_1 et c_2 sont disjoints).

Pour deux lacets simples, nous avons le théorème suivant dû à Epstein [67, théorème 4.1] :

Théorème 1.7 *Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux lacets simples, homotopes et non contractiles, sur une surface orientable. Alors ℓ_1 et ℓ_2 sont isotopes (en tant que lacets).*

(Le théorème n'est plus vrai si les lacets sont contractiles, car deux lacets simples, bordant un disque et orientés dans les sens opposés ne sont pas isotopes. L'orientabilité de la surface est aussi nécessaire.)

1.4.3 Quelques résultats simples

Le même article [67] d'Epstein contient quelques résultats sur l'homotopie de courbes sur les surfaces, que nous utiliserons au chapitre 3 et que nous mentionnons ici. Ceux-ci sont assez intuitifs. Deux d'entre eux décrivent les surfaces que l'on obtient par découpage le long de certains lacets :

Théorème 1.8 (Epstein [67, théorème 1.7]) *Soit ℓ un lacet simple contractile sur une surface. Alors ℓ est le bord d'un disque topologique.*

Lemme 1.9 (Epstein [67, lemme 2.4]) *Soient γ et γ' deux cycles simples et deux à deux disjoints, homotopes mais non contractiles. Alors γ et γ' bordent un cylindre.*

Étant donné un lacet ℓ et un entier relatif k, la $k^{\text{ième}}$ puissance de ℓ est la concaténation de $|k|$ fois le lacet ℓ (si $k \geq 0$) ou ℓ^{-1} (si $k < 0$).

Lemme 1.10 (Epstein [67, lemme 4.3]) *Soient ℓ un lacet non contractile sur une surface orientable et $k \geq 1$. Alors la $k^{\text{ième}}$ puissance de ℓ n'est pas contractile.*

Plus précisément :

Théorème 1.11 (Epstein [67, théorème 4.2 et lemme 4.3]) *Soit ℓ un lacet non contractile sur une surface orientable. Soit $k \geq 2$. Alors il n'existe pas de lacet simple homotope à la $k^{\text{ième}}$ puissance de ℓ.*

1.4.4 Revêtement universel

Informellement, le *revêtement universel* d'une surface $\mathcal{M}$ est une surface $\widetilde{\mathcal{M}}$ telle qu'il est possible de *relever* des courbes de $\mathcal{M}$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ et telle que deux chemins sont homotopes dans $\mathcal{M}$ si et seulement si ces chemins se relèvent en des chemins qui ont mêmes extrémités dans $\widetilde{\mathcal{M}}$. Le revêtement universel est donc un outil pour calculer l'homotopie.

1.4.4.1 Exemples

Soit $\mathcal{M}$ l'anneau (qui est homéomorphe à un cylindre) représenté sur la figure 1.19A. Si l'on découpe l'anneau le long du trait pointillé, on obtient un rectangle ; si l'on recolle une infinité de copies de ce rectangle entre elles, on obtient une « bande infinie » représentée sur la figure 1.19B, que l'on notera $\widetilde{\mathcal{M}}$. Il y a une « projection » naturelle π de $\widetilde{\mathcal{M}}$ dans $\mathcal{M}$, de sorte qu'un chemin dans $\mathcal{M}$ se *relève* en un chemin (en fait, une infinité de chemins) dans $\widetilde{\mathcal{M}}$. On voit que deux chemins c et c' sont homotopes sur $\mathcal{M}$ si deux relevés de c et c' qui partent d'un même sommet de $\widetilde{\mathcal{M}}$ ont les mêmes extrémités. Sur la figure, les deux lacets représentés ne sont pas homotopes, car l'un est contractile (ses relevés dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ sont des courbes fermées) et l'autre ne l'est pas (ses relevés ne sont pas fermés).

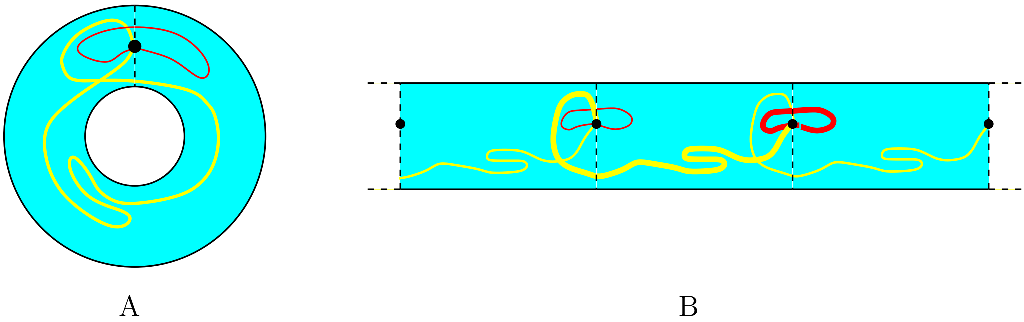


Fig. 1.19 – A : Un anneau $\mathcal{M}$ et deux lacets ayant même point-base (en noir). B : Son revêtement universel $\widetilde{\mathcal{M}}$, avec des relevés de ces lacets. Les sommets de $\widetilde{\mathcal{M}}$ en noir sont les relevés du point-base.

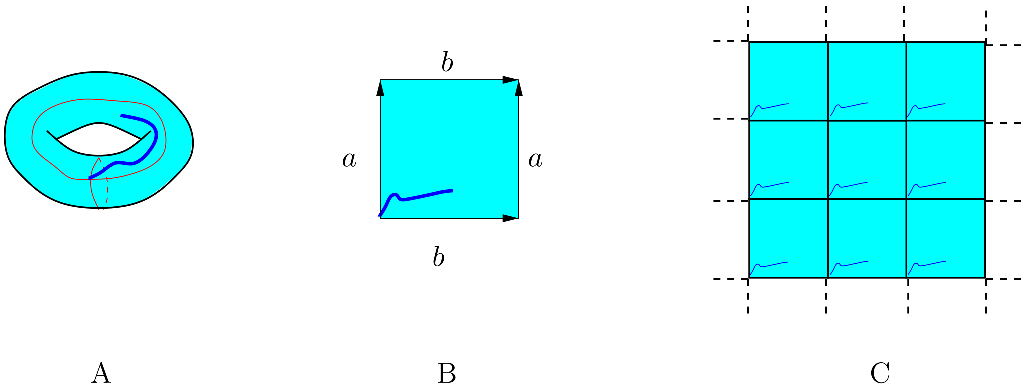


Fig. 1.20 – A : Un tore. B : Un schéma polygonal du tore. C : Le revêtement universel du tore.

On peut faire le même genre de figure pour le tore (figure 1.20A). Si l'on voit ce tore $\mathcal{M}$ sous la forme d'un schéma polygonal canonique (figure 1.20B), un carré dont les côtés opposés vont être identifiés pour obtenir $\mathcal{M}$, son revêtement universel consiste en une infinité de copies de ce schéma polygonal collées le long des côtés du schéma : c'est donc le plan (figure 1.20C).

1.4.4.2 Définition et propriétés

Précisément, un *revêtement universel* d'une surface connexe $\mathcal{M}$ est la donnée d'une paire $(\widetilde{\mathcal{M}}, \pi)$, où :

- $\widetilde{\mathcal{M}}$ est une surface (possiblement non compacte) *simplement connexe*, c'est-à-dire que tout lacet dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ est contractile ;
- π est une application continue de $\widetilde{\mathcal{M}}$ dans $\mathcal{M}$, appelée *projection*, satisfaisant la condition d'*homéomorphisme local* suivante : tout point x de $\mathcal{M}$ a un voisinage ouvert connexe U tel que $\pi^{-1}(U)$ est une union d'ouverts disjoints $(U_i)_{i\in I}$ et $\pi|_{U_i} : U_i \to U$ est un homéomorphisme.

Il est connu que toute surface connexe admet un revêtement universel (voir [114, chapitre 5]). D'autre part, deux revêtements universels sont isomorphes (c'est-à-dire qu'il y a un homéomorphisme entre eux qui se « projette » en l'identité). On peut donc parler sans ambiguïté *du* revêtement universel d'une surface $\mathcal{M}$.

Un *relevé* d'un chemin p est un chemin $\widetilde{p}$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ tel que $\pi \circ \widetilde{p} = p$. Un *automorphisme* de $(\widetilde{\mathcal{M}}, \pi)$ est un homéomorphisme $h : \widetilde{\mathcal{M}} \to \widetilde{\mathcal{M}}$ qui préserve la structure de revêtement : $\pi \circ h = \pi$.

Les principales propriétés de $(\widetilde{\mathcal{M}}, \pi)$ que nous utiliserons sont :

- la *propriété de relèvement* : soit p un chemin dans $\mathcal{M}$ dont l'origine est y ; soit $x \in \pi^{-1}(y)$. Alors il existe un unique chemin $\widetilde{p}$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}$, d'origine x, tel que $\pi \circ \widetilde{p} = p$;
- la *propriété d'homotopie* : deux chemins p_1 et p_2 avec les mêmes extrémités sont homotopes dans $\mathcal{M}$ si et seulement si ils ont deux relevés $\widetilde{p}_1$ et $\widetilde{p}_2$ qui ont les mêmes extrémités dans $\widetilde{\mathcal{M}}$;
- la *propriété d'intersection* : un chemin p sur $\mathcal{M}$ s'auto-intersecte si et seulement si soit un relevé de p s'auto-intersecte, soit deux relevés de p s'intersectent.

On définit de même la notion de relevé pour les autres types de courbes : un *relevé* d'un chemin infini $p : \mathbf{R} \to \mathcal{M}$ est un chemin infini $\widetilde{p}$ tel que $\pi \circ \widetilde{p} = p$. Un *relevé* d'un cycle γ (vu comme application de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}$ telle que $\gamma(.) = \gamma(1+.)$) est un chemin infini $\widetilde{\gamma} : \mathbf{R} \to \widetilde{\mathcal{M}}$ tel que $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.

1.4.4.3 Une construction du revêtement universel

Soit $\mathcal{M}$ une surface polyédrale connexe. On peut [92, pp. 209–212] décrire en toute généralité une construction du revêtement universel de $\mathcal{M}$. Nous nous contentons de donner une idée de la construction dans le cas où la surface polyédrale $\mathcal{M}$ n'a aucun sommet en son intérieur (nous suivons la description d'Hershberger et Snoeyink [94]). Schipper [135] et Dey et Schipper [54] ont donné des algorithmes pour construire le revêtement universel dans le cas des surfaces sans bord.

L'algorithme maintient une portion S du revêtement universel de $\mathcal{M}$ déjà construite qui est un disque topologique. S est constituée de copies de polygones de $\mathcal{M}$ (en d'autres termes, on connaît l'image par π de chaque point de S). Les arêtes de S sont de deux types : les arêtes *actives*, au-delà desquelles la construction du revêtement universel doit être poursuivie, et les arêtes *inactives*, qui sont déjà incidentes à deux polygones dans S (ou à un seul, si elles se projettent sur le bord de $\mathcal{M}$). Initialement, S consiste en une copie d'un seul polygone de $\mathcal{M}$, et les arêtes de cette copie sont toutes actives sauf celles se projetant sur le bord de $\mathcal{M}$. On itère le procédé suivant :

- soit p un polygone de S ayant une arête active a ;
- soit p' une copie du polygone de $\mathcal{M}$ adjacent à $\pi(p)$ par $\pi(a)$;
- on recolle p' à p via l'arête a ;
- on rend actives les arêtes de p' qui ne se projettent pas sur le bord de la surface, sauf a, qui est rendue inactive.

La figure 1.21 présente un exemple de cette construction. Ce procédé est bien sûr infini (sauf dans le cas de la sphère ou du disque). Pour montrer que l'application π est un homéomorphisme local, on utilise de façon cruciale le fait que le graphe dual G^* du graphe sommets-arêtes G de $\mathcal{M}$ est acyclique (car les som-

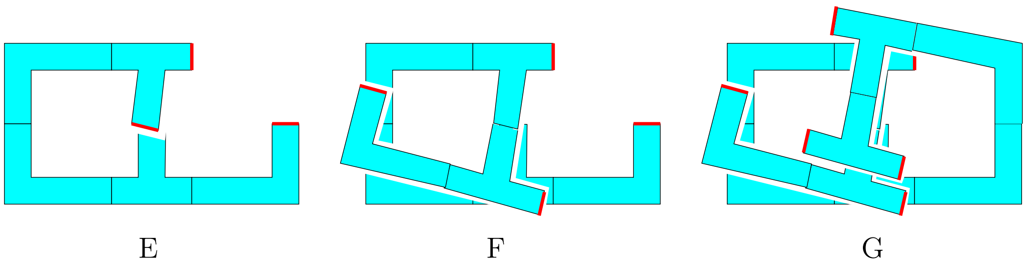


FIG. 1.21 – La construction du revêtement universel d'un pantalon (un polygone à deux trous du plan). Les arêtes actives sont représentées en gras. A : La surface polyédrale elle-même. B : Initialisation de la construction avec un seul polygone. C : Après une étape élémentaire, S se compose de deux polygones. D : Quelques étapes plus tard. E, F, G : Poursuite de la construction. On voit que plusieurs polygones de S se projettent en un même polygone de $\mathcal{M}$.

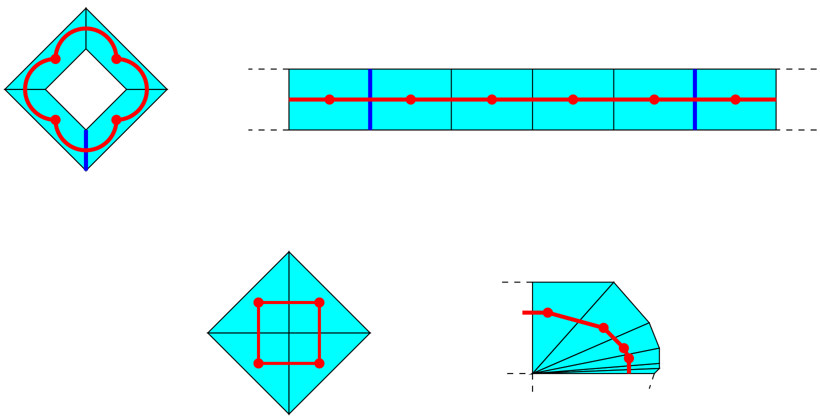


FIG. 1.22 – En haut, la construction du revêtement universel d'un anneau représenté par une triangulation dont tous les sommets sont sur le bord. Le graphe dual de la triangulation est représenté. En bas, un exemple qui montre que la même construction échoue s'il y a des sommets de la triangulation à l'intérieur de $\mathcal{M}$: dans cet exemple d'une triangulation d'un disque avec un sommet à l'intérieur, on ne construit pas le revêtement universel, mais un objet qui possède un sommet incident à une infinité de triangles.

mets de G sont sur le bord de la surface), voir la figure 1.22. D'autre part, le fait que l'espace construit est simplement connexe est clair, car le dual de son graphe sommets-arêtes est un arbre.

1.4.4.4 Propriété des courbes dans le revêtement universel

Le théorème de Jordan donne une propriété de séparation des cycles dans le plan. Le lemme suivant, qui nous sert dans le chapitre 3, étend cette propriété au cas où l'espace est le revêtement universel d'une surface.

Lemme 1.12 *Soit $\mathcal{M}$ une surface et $(\widetilde{\mathcal{M}}, \pi)$ son revêtement universel. Soit c une courbe simple sur $\mathcal{M}$ qui est :*
- *soit un chemin qui intersecte $\partial\mathcal{M}$ exactement en ses extrémités,*
- *soit un cycle dans l'intérieur de $\mathcal{M}$.*

Alors chaque relevé $\widetilde{c}$ de c dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ sépare $\widetilde{\mathcal{M}}$ en deux composantes connexes.

Démonstration. Une démonstration se trouve dans [24, p. 417] ; nous donnons l'intuition d'une démonstration possible. Nous allons exhiber une construction du revêtement universel de $\mathcal{M}$ pour laquelle il apparaîtra clairement que les relevés de c sont séparateurs (nous utilisons donc implicitement l'unicité du revêtement universel à isomorphisme près).

Découpons $\mathcal{M}$ le long de c, obtenant ainsi une surface $\mathcal{M}'$. Le bord de $\mathcal{M}'$ est donc constitué de portions qui proviennent du bord de $\mathcal{M}$ et d'autres portions qui proviennent du découpage de $\mathcal{M}$ le long de c. Soit $(\widetilde{\mathcal{M}'}, \pi)$ le revêtement universel de $\mathcal{M}'$. Le bord de $\widetilde{\mathcal{M}'}$ est constitué de portions qui sont des relevés de c, ainsi que de portions qui sont des relevés de portions de bords de $\mathcal{M}'$.

Pour chaque portion $\widetilde{c}_1$ de bord de $\widetilde{\mathcal{M}'}$ qui est un relevé de c, on crée une copie $\widetilde{\mathcal{M}'}_{\widetilde{c}_1}$ de $\widetilde{\mathcal{M}'}$. On recolle alors $\widetilde{c}_1$ avec une portion de bord de $\widetilde{\mathcal{M}'}_{\widetilde{c}_1}$ qui a l'orientation opposée. On obtient ainsi une surface dont le bord est aussi constitué de portions qui sont des relevés de c ou des relevés de portions de bords de $\mathcal{M}'$. On poursuit la construction, en collant à cette surface de nouvelles copies de $\widetilde{\mathcal{M}'}$.

L'espace topologique obtenu est clairement simplement connexe (le graphe dual des copies de $\widetilde{\mathcal{M}'}$ recollées est un arbre et chaque copie est simplement connexe). Il reste à vérifier que c'est bien une surface qui est un revêtement de $\mathcal{M}$. De plus, chaque relevé de c sépare cette surface en deux composantes connexes.
□

Chapitre 2

Travaux antérieurs

La contribution principale de cette thèse, au chapitre 3, se fonde sur l'étude et le calcul de plus courts chemins sur des surfaces, dans une classe d'homotopie donnée. Dans ce chapitre, nous présentons un panorama des résultats déjà existants et dont la thématique est proche. Nous aborderons successivement :

– les travaux traitant du calcul de plus courts chemins, dans un graphe et sur une surface ;
– les résultats de topologie algorithmique relatifs aux problèmes d'homotopie et de décomposition de surfaces en schémas polygonaux ;
– les algorithmes concernant la recherche de plus courts chemins à classe d'homotopie fixée ;
– les domaines d'applications des travaux présentés.

Nous situerons notre travail par rapport à ces résultats au fur et à mesure qu'ils apparaîtront. La lecture de ce chapitre n'est pas nécessaire à la compréhension du chapitre suivant.

Nous avons choisi de ne pas faire ici un état de l'art des travaux reliés aux chapitres 4 et 5 : il nous a semblé plus intéressant de creuser les références bibliographiques d'un seul de nos travaux. Ces deux chapitres contiennent toutefois chacun une présentation, nettement plus sommaire que dans le présent chapitre, des travaux qui y sont liés.

2.1 Calculs de plus courts chemins

Une partie de notre travail est axée sur le *raccourcissement* de courbes. Dans cette section, nous nous intéressons au problème du calcul de plus courts chemins. Notre objectif n'est pas, ici, de dresser un éventail des contributions du domaine : plusieurs chapitres d'ouvrages et articles sont dédiés à ce sujet (on pourra consulter [137, chapitres 6 à 9] et [115]). Nous nous bornons à indiquer quelques travaux significatifs dont nous aurons à reparler plus loin. Nous évoquons d'abord le problème du calcul de plus courts chemins dans un graphe, puis dans un domaine du plan, et enfin sur une surface polyédrale (chaque polygone étant un polygone euclidien).

2.1.1 Plus courts chemins dans les graphes

De par leur généralité, les graphes apparaissent dans de nombreux problèmes, qu'il s'agisse de graphes géométriques (plongés sur une surface ou dans l'espace) ou abstraits (modélisant des liens entre personnes ou entités, dans un réseau, ...). Les calculs de plus courts chemins dans un graphe constituent un problème fondamental en optimisation combinatoire.

Schrijver [137, chapitres 6 à 9] a récemment décrit, de façon extensive, les différents algorithmes de calcul de plus courts chemins dans les graphes ; nous renvoyons le lecteur intéressé à ce livre. On pourra aussi consulter [44, pp. 514–578]. Il existe plusieurs variantes du problème : s'agit-il d'un graphe orienté ou non ? le graphe est-il valué, ou les arêtes ont-elles toutes un poids égal à un ? s'il est valué, les poids peuvent-ils être négatifs ? cherche-t-on un plus court chemin entre deux points, ou l'ensemble des plus courts chemins partant d'un point donné, ou encore l'ensemble de tous les plus courts chemins dans le graphe ? Nous nous contentons d'évoquer le cas d'un graphe (non orienté) $G = (V, E)$, valué, à poids positifs ou nuls, pour lequel on veut calculer un plus court chemin entre deux sommets s et t. De façon peut-être surprenante, la plupart des algorithmes qui résolvent ce problème calculent, avec la même complexité, un plus court chemin entre s et *tous* les sommets du graphe. En fait, ils calculent un arbre couvrant de G, de racine s, tel que tous les chemins simples dans l'arbre qui partent de s sont des plus courts chemins.

La méthode de Dijkstra [56] de 1959, bien connue, fonctionne selon ce principe. Expliquons d'abord comment calculer la distance de s à tous les sommets du graphe. On maintient :

1. pour chaque sommet v, une valeur $d(v) \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$, qui est égale à la longueur (éventuellement infinie) d'un chemin de s à v : initialement, la fonction d vaut 0 en s et $+\infty$ en les autres sommets. La valeur de $d(v)$ ne fera que décroître au cours de l'algorithme et sera, à la fin, égale à la distance de s à v ;
2. un ensemble $U \subset V$, initialement vide, de sommets pour lesquels la valeur de d est exactement la distance au sommet s ;
3. la propriété suivante : à chaque instant, pour toute arête (u, v), $u \in U$ et $v \in V \setminus U$, $d(v)$ est inférieur ou égal à $d(u) + |uv|$. (La notation $|uv|$ désigne la longueur de l'arête (u, v).)

L'algorithme consiste, itérativement, à trouver $v \in V \setminus U$ tel que $d(v)$ est minimal. La distance de s à v est alors nécessairement égale à $d(v)$; on ajoute donc v dans U. Pour maintenir la troisième propriété, on procède à une phase dite de *relaxation* : pour chaque sommet v' incident à v, si $d(v') > d(v) + |vv'|$, on met $d(v')$ à $d(v) + |vv'|$. On poursuit tant que $U \neq V$.

On adapte facilement cet algorithme pour calculer un arbre de plus courts chemins, de racine s : chaque sommet distinct de s maintient la valeur de son père, mise à jour lors de chaque étape de relaxation. Du point de vue de la complexité, la difficulté est d'accéder rapidement au sommet de $V \setminus U$ dont la valeur de d est minimale. En utilisant cette méthode avec des tas de Fibonacci, on peut calculer un arbre de plus courts chemins en temps $O(|E| + |V| \log |V|)$.

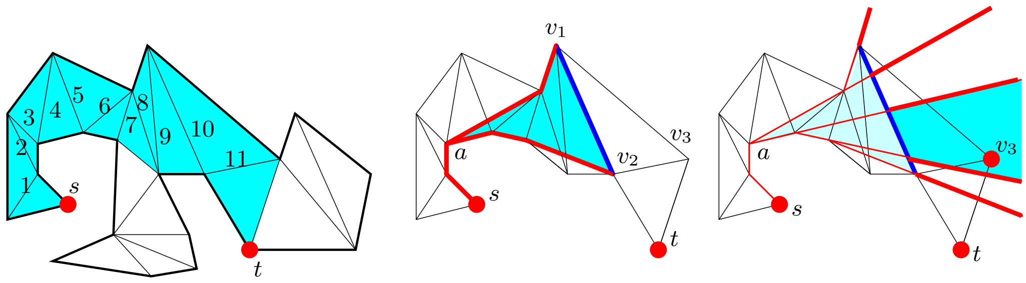


FIG. 2.1 – L'algorithme de l'entonnoir. À gauche, la bande de triangles joignant les sommets s et t, et les arêtes $e_1, \ldots, e_{11}$. Au milieu, un entonnoir défini par s et l'arête v_1v_2. À droite, la recherche du plus court chemin de s à v_3 revient à chercher dans quel « secteur » se trouve v_3.

Bien des variantes du problème ont été étudiées ; signalons un résultat utile dans notre contexte, dû à Henzinger, Klein, Rao et Subramanian [93] en 1997. Soit G un graphe planaire non orienté. Il existe un algorithme de complexité linéaire $O(|E|)$ pour calculer un plus court chemin entre s et chaque sommet de G. La pierre angulaire de leur méthode est l'existence, pour un graphe planaire, de bons *ensembles séparateurs*, qui sont des ensembles « petits » de sommets séparant le graphe en composantes connexes « pas trop grandes » ; on utilise aussi des relaxations comme dans la méthode de Dijkstra.

2.1.2 Plus courts chemins dans un domaine du plan

Intéressons-nous maintenant au cas, plus géométrique, du calcul de plus court chemin sur une surface. Nous allons traiter le cas d'un domaine du plan et d'une surface polyédrale. Nous renvoyons le lecteur intéressé par les plus courts chemins géométriques en général à [115].

Commençons par le cas d'un polygone simple (c'est-à-dire sans trou) du plan. L'algorithme de l'*entonnoir*[1], de Lee et Preparata [107], permet de calculer un plus court chemin entre deux sommets s et t d'un polygone simple P. On commence par trianguler l'intérieur du polygone P sans ajouter de sommets (voir par exemple [19, p. 278]) ; soit T une telle triangulation. Le graphe dual de T est un arbre, et l'ensemble des triangles qui joignent s à t constitue une bande de triangles B. Le plus court chemin entre s et t se trouve nécessairement dans B. Appelons $e_1, \ldots, e_n$ la liste des arêtes intérieures de B, dans l'ordre de s à t (figure 2.1, à gauche). Pour calculer le plus court chemin entre s et t, il suffit, connaissant le plus court chemin de s aux extrémités de e_i, de savoir calculer le plus court chemin de s aux extrémités de e_{i+1}.

Soient v_1 et v_2 les extrémités de e_i. Tout repose sur la structure des plus courts chemins c_1 (resp. c_2) entre s et v_1 (resp. s et v_2). Partant de s, c_1 et c_2 peuvent être confondus au départ, jusqu'à un sommet a, où ils se séparent en suivant des chaînes concaves jusqu'aux sommets v_1 et v_2 ; d'où le nom suggestif d'entonnoir, qui dénote la zone comprise entre a, v_1 et v_2 (figure 2.1, au milieu). Cette structure

[1] funnel, en anglais.

simple permet, connaissant les plus courts chemins c_1 et c_2, d'en déduire le plus court chemin entre s et le sommet v_3 de l'arête e_{i+1} distinct de v_1 et v_2 : il suffit de déterminer dans quel « secteur » du plan, délimité par les droites supports des segments de c_1 et c_2 touchant l'entonnoir, se trouve v_3 (figure 2.1, à droite). La triangulation étant donnée, le calcul du plus court chemin entre s et t se fait en temps linéaire en le nombre de triangles traversés (en fait, il est théoriquement possible de trianguler P en temps linéaire [30]).

Nous venons de considérer le problème du calcul d'un plus court chemin dans le cas d'un polygone simple. Mais que se passe-t-il si l'espace métrique est une région polygonale quelconque du plan (plan avec obstacles par exemple) ? Deux grands types d'approches sont connus. Le premier consiste à calculer le graphe de visibilité de la scène (voir par exemple [46, chapitre 15] ou [5]), qui contient tous les plus courts chemins entre sommets. Le second consiste à simuler la propagation d'une « onde » à partir d'un sommet s, et à voir quand cette onde atteint le sommet extrémité t. En d'autres termes, on maintient l'ensemble des points à une certaine distance de s. L'article d'Hershberger et Suri [95] donne ainsi un algorithme optimal, en $O(n \log n)$, où n est le nombre de sommets de la scène, pour calculer un plus court chemin.

Signalons pour conclure un article de Papadopoulou [124], relié à notre travail. Le problème est le suivant : étant donné un polygone simple P et k paires de points (s_i, t_i) sur le bord de P, calculer, si elle existe, la famille des k plus courts chemins simples et deux à deux disjoints entre s_i et t_i, $i = 1, \ldots, k$. Bien entendu, il peut ne pas exister une telle famille : par exemple, si $k = 2$ et si l'ordre des sommets sur le bord du polygone est s_1, s_2, t_1, t_2, tout chemin entre s_1 et t_1 va croiser tout chemin entre s_2 et t_2. Les chemins sont supposés être disjoints dans un sens affaibli : on les autorise à se longer, mais pas à se croiser (en d'autres termes, il existe une perturbation arbitrairement petite qui rend les chemins simples et disjoints). L'algorithme donné par Papadopoulou est de complexité $O(k+n \log k)$, où n est la complexité du polygone. Au chapitre 3, nous aurons aussi à trouver une famille de plus courts chemins, simples et sans croisements, mais dans le cas d'une surface non nécessairement planaire et en maintenant la classe d'homotopie.

2.1.3 Plus courts chemins sur des surfaces polyédrales

Abordons maintenant le calcul de plus courts chemins sur une surface polyédrale. La définition *topologique* d'une surface polyédrale a été donnée au chapitre 1 ; nous ajoutons à cette définition une propriété *métrique* : chaque polygone est isométrique à un polygone du plan euclidien (en particulier, les longueurs des arêtes identifiées sont les mêmes).

Il nous faut distinguer la notion de plus court chemin de celle de *géodésique*, qui est un chemin *localement minimal*, c'est-à-dire qu'une perturbation locale de ce chemin allonge sa longueur. Un plus court chemin est une géodésique, la réciproque étant fausse. Partant d'un chemin entre deux points, on peut le déformer en une géodésique par optimisations locales ; en revanche, pour calculer un plus court chemin, il est insuffisant de se cantonner à de telles méthodes. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux calculs de plus courts chemins.

Un problème intermédiaire est de calculer la suite des arêtes croisées par le plus court chemin. Une propriété cruciale est la propriété de *dépliement* : si un plus court chemin croise une arête e et si l'on met à plat les deux polygones incidents à e, alors le plus court chemin est un segment de droite dans cette représentation. Si l'on connaît la suite des arêtes croisées par le plus court chemin, cette propriété montre que l'algorithme de l'entonnoir peut être utilisé dans la bande de triangles correspondante pour calculer le plus court chemin. D'un point de vue théorique, on peut étudier [118, 1] les suites d'arêtes croisées par tous les plus courts chemins sur un polyèdre convexe, ce qui fournit une indication sur la structure de ces plus courts chemins.

Mitchell, Mount et Papadimitriou [116] ont donné un algorithme de calcul exact de plus courts chemins sur une surface polyédrale (non nécessairement convexe et de topologie arbitraire), en temps $O(n^2 \log n)$, où n est la complexité de la surface. Leur méthode repose sur la technique du « Dijkstra continu » : étant donné un point s, il s'agit de calculer une subdivision du polyèdre de telle sorte que, dans chaque région, les plus courts chemins au point s croisent les mêmes arêtes de la surface. Chen et Han [31] ont montré que le problème est résoluble en temps $O(n^2)$. Leur méthode est de construire un arbre de suites d'arêtes croisées par les plus courts chemins (sans subdiviser la surface) ; ils parviennent à borner la taille de cet arbre.

Des algorithmes d'approximation ont aussi été développés. Généralement, on raffine le graphe sommets-arêtes de la surface d'une certaine manière et on calcule le plus court chemin dans ce graphe. En pratique, ces algorithmes fonctionnent bien et sont assez simples à programmer [99] ; on peut même garantir la qualité de l'approximation [104]. Il est aussi possible d'utiliser des « méthodes de marche rapide »[2], qui simulent la propagation d'une onde à partir d'un sommet de départ ; voir [138, pp. 289–298].

Par ailleurs, calculer un plus court chemin dans l'espace $\mathbf{R}^3$ avec obstacles est nettement plus difficile : Canny et Reif [27] ont démontré que ce problème est NP-complet. Des algorithmes d'approximation sont, là encore, développés.

2.2 Courbes sur des surfaces : homotopie et décomposition

La topologie des surfaces, telle que nous en avons esquissé les grandes lignes dans le chapitre précédent, remonte à la première moitié du XX$^{\text{e}}$ siècle. Nous allons ici nous intéresser aux aspects algorithmiques de cette discipline, en mettant l'accent sur les problèmes d'homotopie de courbes sur les surfaces. Nous nous restreignons donc à une petite partie de la topologie algorithmique ; notamment, nous ne tentons pas d'évoquer les questions d'homologie, et notre propos ne nous portera que très brièvement sur la théorie de Morse. Pour des références générales sur la topologie algorithmique, nous renvoyons le lecteur aux publications [153, 11, 51]. De plus, nous reportons à la section suivante les problèmes de

[2] fast marching methods, en anglais.

raccourcissement de courbes en maintenant leur classe d'homotopie, qui sont plus directement liés à nos travaux.

Dans une première partie, nous allons évoquer les différents algorithmes de calcul de schémas polygonaux, qui constituent assez souvent l'étape préliminaire pour résoudre les problèmes d'homotopie sur les surfaces. Nous aborderons ensuite les méthodes qui permettent de décider si deux courbes sont homotopes, un problème assez central. Enfin, nous décrirons plus brièvement les techniques employées pour décider si une courbe est homotope à une courbe simple, ou pour « décroiser » un ensemble de courbes.

Sauf mention contraire, la surface $\mathcal{M}$ est une surface triangulée (souvent, les algorithmes s'étendent au cas où $\mathcal{M}$ est polyédrale), et les courbes sont des cycles ou des chemins, fermés ou non, dans le graphe sommets-arêtes de $\mathcal{M}$.

2.2.1 Décomposition de surfaces

2.2.1.1 Schémas réduits ou canoniques

Pour une surface $\mathcal{M}$, l'existence d'un schéma polygonal est connue depuis la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle : la démonstration classique du théorème de classification des surfaces consiste exactement à démontrer que toute surface a un schéma polygonal canonique. Cette démonstration est effective : partant d'un schéma polygonal quelconque, elle donne un moyen de calculer un schéma canonique, comme indiqué dès 1921 par Brahana [21].

Notons d'ores et déjà qu'il n'existe pas nécessairement de schéma polygonal réduit dont les lacets sont sur le graphe sommets-arêtes G de $\mathcal{M}$. Si la surface est sans bord et de genre g, le point-base du système de lacets correspondant devrait avoir pour degré au moins $4g$, ce qui n'est bien sûr pas toujours le cas. Il faut donc tracer des lacets hors de G. En fait, d'un point de vue algorithmique, ceci n'est pas nécessaire : on peut supposer que plusieurs lacets passent par une même arête de G, de telle sorte que l'on puisse les « écarter » pour qu'ils deviennent simples et deux à deux disjoints. Au chapitre 3, nous aurons aussi à considérer des chemins qui se « longent » sur le graphe sommets-arêtes ; voir la figure 2.2, et, pour plus de détails, la section 3.1, page 64.

Lazarus, Pocchiola, Vegter et Verroust [105] ont travaillé sur le calcul d'un schéma canonique dans le cas d'une surface combinatoire. Ils ont donné deux algorithmes avec une complexité, optimale, en $O(gn)$, pour une surface $\mathcal{M}$ orientable sans bord. Leur premier algorithme, esquissé dans [154], est incrémental : le principe est de maintenir, à chaque étape de l'algorithme, une surface S dont le bord est un cycle simple sur le graphe sommets-arêtes de $\mathcal{M}$. Au départ, S est la surface $\mathcal{M}$ privée d'un triangle. On rétrécit la surface S en supprimant itérativement des triangles incidents à son bord. Quand la suppression d'un tel triangle modifie la topologie du bord (qui n'est plus un cycle simple), il y a deux cas selon que cette suppression déconnecte S ou non. Si elle la déconnecte, on lance l'algorithme récursivement sur chacune de ses composantes connexes (si leur genre est strictement positif). Sinon, cette modification topologique du bord permet de calculer une paire de lacets, qui fera partie du schéma canonique final, et on lance l'algorithme sur la surface découpée le long de ces lacets.

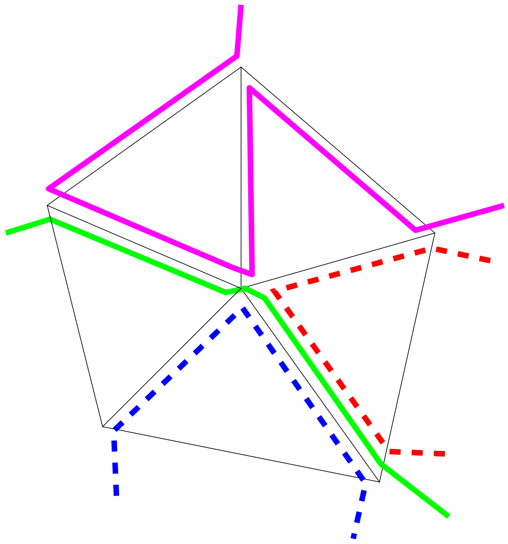


FIG. 2.2 – Des chemins qui longent le graphe sommets-arêtes d'une surface $\mathcal{M}$. Pour chaque arête e de ce graphe, on suppose connu l'ordre, de gauche à droite, des arêtes des chemins longeant e.

La méthode précédente construit directement un schéma canonique. Au contraire, le second algorithme proposé dans [105] est fondé sur une utilisation de la méthode de Brahana [21] : on calcule d'abord un schéma polygonal quelconque, qui est mis sous forme réduite puis canonique. Le calcul d'un schéma initial se fait simplement en calculant un sous-graphe G' de G tel que son complémentaire est un disque ouvert (voir la section 1.3.2). En fait, G' a $2g$ cycles indépendants et ce sont eux qui vont jouer un rôle dans la suite, puisqu'ils engendrent le groupe fondamental de $\mathcal{M}$. On obtient un schéma réduit en prolongeant les cycles de G' en des lacets ayant un point-base commun, puis on le transforme en un schéma canonique en procédant combinatoirement à des transformations dites « de Brahana », qui sont des opérations de type découpage–collage, la difficulté consistant à obtenir une complexité $O(gn)$ à la fin.

2.2.1.2 Schémas courts

En 2002, Erickson et Har-Peled [68] ont considéré le problème de trouver le plus court schéma polygonal d'une surface. Soit $\mathcal{M}$ une surface polyédrale, orientable ou non, de genre g et à k bords ; supposons que chaque arête ait un *poids* strictement positif. On cherche à découper $\mathcal{M}$ le long de certaines de ses arêtes pour en faire un disque topologique, en minimisant la somme des poids des arêtes découpées. (Ici, chaque arête de la surface contient au plus un chemin du schéma polygonal.) L'article contient plusieurs résultats :

- le problème que nous venons d'évoquer est NP-difficile, même dans le cas où toutes les arêtes ont un poids unité. On peut en effet réduire ce problème au problème de *l'arbre de Steiner rectiligne* : étant donnés n points sur une grille carrée de taille $m \times m$, trouver le plus court arbre dans la grille qui

contient tous les points est NP-difficile ;
- il existe un algorithme pour résoudre ce problème en temps $n^{O(g+k)}$. Soit G le schéma polygonal le plus court sur $\mathcal{M}$, vu comme un sous-graphe du graphe sommets-arêtes de $\mathcal{M}$. Soit $\hat{G}$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant les arêtes pendantes non incidentes au bord de $\mathcal{M}$ et en supprimant les sommets de degré 2 ; on montre que $\hat{G}$ a $O(g+k)$ sommets et $O(g+k)$ arêtes ; on procède ensuite par une recherche exhaustive ;
- les auteurs ont donné aussi un algorithme polynomial pour calculer une $O(\log^2 g)$-approximation du schéma polygonal le plus court possible. Leur approche consiste à découper la surface itérativement le long de cycles essentiels courts, jusqu'à obtenir des surfaces de genre nul, puis à découper ces surfaces à l'aide d'un arbre couvrant joignant les bords de ces surfaces. Ils ont aussi donné une méthode pour calculer exactement le plus court cycle essentiel dans le graphe sommets-arêtes de $\mathcal{M}$.

2.2.1.3 Autres types de décompositions

Nous avons volontairement limité notre propos au cas des décompositions par schémas polygonaux, parce qu'ils sont les plus proches de notre travail. Il existe toutefois d'autres types de décompositions topologiques de surfaces.

Dans la conclusion de [68] est mentionnée l'existence de décompositions en pantalons des surfaces, mais, à notre connaissance, aucun algorithme à ce sujet n'existe dans la littérature.

Les complexes de Morse–Smale constituent un type de décomposition important d'une surface $\mathcal{M}$. Une propriété est qu'ils dépendent d'une fonction $f : \mathcal{M} \to \mathbf{R}$ (dans le cas où $\mathcal{M}$ est plongée dans $\mathbf{R}^3$, on peut prendre pour f la « fonction hauteur » de la surface). L'idée est de décomposer $\mathcal{M}$ le long des lignes de champ de f passant par des points critiques de f. Ceci a mathématiquement été bien étudié ; des difficultés se posent dans le cas polyédral. Edelsbrunner, Harer et Zomorodian [63] ont donné un algorithme pour calculer des complexes de Morse–Smale décomposant une surface $\mathcal{M}$. Cette approche se généralise en dimension supérieure [62].

Un autre problème [28] est celui de vouloir décomposer un complexe simplicial de dimension deux, qui n'est, *a priori*, pas une surface, en surfaces : on découpe le complexe le long des arêtes de sorte qu'après découpage, le complexe soit une réunion de surfaces.

2.2.2 Tests de contractibilité et d'homotopie

Les deux questions suivantes ont suscité un certain intérêt, à la fois lors du développement de la topologie algébrique et depuis l'émergence de la topologie algorithmique :
- le *problème de la contractibilité* est le suivant : sur une surface combinatoire $\mathcal{M}$, décider si un chemin fermé c est contractile. Un autre problème est de décider si deux chemins donnés c_1 et c_2 sont homotopes ; il est trivialement équivalent au problème de la contractibilité car c_1 et c_2 sont homotopes si

et seulement si la concaténation de c_1 et de l'inverse de c_2 est un chemin fermé contractile ;
– le problème qui consiste à décider si deux cycles donnés γ_1 et γ_2 sont homotopes. Résoudre ce problème permet évidemment de résoudre le premier, un chemin fermé étant contractile si et seulement si le cycle correspondant est contractile. Ce problème est donc plus difficile que le précédent.

Nous indiquons ici les deux principales approches proposées pour résoudre ces problèmes. Sauf mention contraire, la surface $\mathcal{M}$ considérée est sans bord.

2.2.2.1 Approche utilisant le revêtement universel

Une première approche se fonde sur le revêtement universel. Supposons que nous sachions construire le revêtement universel $(\widetilde{\mathcal{M}}, \pi)$ de notre surface $\mathcal{M}$ (ou, du moins, une partie suffisamment grande de ce revêtement) et construire des relevés de chemins de $\mathcal{M}$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}$. Alors, décider si un chemin c est contractile revient à relever c en un chemin $\widetilde{c}$, qui est fermé si et seulement si c est contractile.

Schipper [135] s'est appuyé sur cette constatation. Son algorithme construit incrémentalement la portion du revêtement universel qui contient un relevé d'une courbe. Cette construction repose sur le calcul préliminaire d'un schéma polygonal canonique de $\mathcal{M}$; ensuite, des copies de ce schéma polygonal sont recollées au fur et à mesure de l'avancement de l'algorithme. Grâce à cette construction, il peut résoudre le problème de la contractibilité en temps $O(gn+g^2k)$, où k est le nombre d'arêtes du chemin, g le genre de la surface et n sa complexité.

Dey et Schipper [54] ont amélioré le résultat précédent : le test de contractibilité peut être fait en temps $O(n + k \log g)$. La méthode est similaire, mais le schéma polygonal n'est plus nécessairement canonique et son stockage est effectué de façon plus efficace, ce qui réduit la complexité du résultat.

Les deux articles précédents fonctionnent également dans le cas non orientable (toujours sans bord). La méthode qui consiste à utiliser le revêtement universel a le mérite d'être géométrique et cette construction est intéressante en soi. Mais cela ne fournit pas d'algorithme pour décider si deux cycles sont homotopes.

2.2.2.2 Approche algébrique

Il est naturel de reformuler ces problèmes en termes algébriques. Un chemin c est contractile si et seulement si c représente l'élément neutre du groupe fondamental ; deux cycles γ_1 et γ_2 sont homotopes si et seulement si les classes d'homotopie de deux lacets (quelconques) ℓ_1 et ℓ_2 associés à γ_1 et γ_2 sont conjuguées.

Considérons un schéma polygonal P de $\mathcal{M}$, canonique pour simplifier, sur une surface orientable de genre g :

$$a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \dots a_g b_g \bar{a}_g \bar{b}_g.$$

Tout chemin sur $\mathcal{M}$ se rétracte sur les arêtes de P. D'autre part, le groupe fondamental de $\mathcal{M}$, noté $\pi_1(\mathcal{M})$, est engendré par les chemins de P. C'est même le groupe libre à $2g$ générateurs

$$[a_1], [b_1], \dots, [a_g], [b_g],$$

quotienté par la relation

$$[a_1][b_1][\bar{a_1}][\bar{b}_1]\dots[a_g][b_g][\bar{a}_g][\bar{b}_g] = 1 \tag{2.1}$$

(1 désignant l'élément neutre de $\pi_1(\mathcal{M})$). On peut donc *coder* la classe d'homotopie d'un chemin par un mot *réduit* (ne contenant aucun facteur de la forme $x\bar{x}$ ou $\bar{x}x$) sur l'alphabet

$$A = \{a_1, \bar{a}_1, b_1, \bar{b}_1, \dots, a_g, \bar{a}_g, b_g, \bar{b}_g\}. \tag{2.2}$$

Ce codage est ambigu à cause de la relation 2.1 : plusieurs mots correspondent à un même élément du revêtement universel. Les problèmes de test de contractibilité et d'homotopie se décomposent donc en deux sous-problèmes :

- *traduire* les courbes en termes algébriques, par des *mots* qui représentent leurs classes dans le groupe fondamental. Cette étape passe par le calcul d'un schéma polygonal ;
- *calculer* dans le groupe fondamental, c'est-à-dire déterminer si un élément de ce groupe, codé par un mot, est l'élément neutre, ou bien encore si deux éléments de ce groupe sont conjugués.

Dehn [49], dès 1912, a montré que les deux problèmes de contractibilité et d'homotopie de cycles sont décidables, sur des surfaces orientables sans bord. Il a donné un algorithme pour calculer dans le groupe fondamental, en codant de façon non ambiguë une classe d'homotopie par un mot réduit sur l'alphabet A. Il ne s'est toutefois pas intéressé au problème de calcul d'un schéma polygonal, et la complexité de son algorithme n'est pas optimale. Voir [145, p. 186].

Près d'un siècle après, en 1999, Dey et Guha [53] ont donné un algorithme optimal pour résoudre ces deux problèmes. Leur approche suit les deux étapes indiquées ci-dessus. Ils évitent toutefois de calculer un schéma polygonal canonique, ce qui serait trop coûteux ; un schéma polygonal réduit suffit, comme dans [54]. La deuxième étape, algébrique, est la plus difficile ; elle repose sur des résultats de théorie combinatoire des groupes [84]. Leur résultat est que le test d'homotopie de deux cycles de complexités k_1 et k_2, sur une surface possiblement non orientable de complexité n, peut se faire en temps $O(n + k_1 + k_2)$. Leur étude exclut toutefois trois surfaces de genre petit pour lesquelles le résultat de théorie des groupes indiqué ne s'applique pas.

2.2.2.3 Le cas des surfaces à bords

Les articles cités précédemment n'évoquent pas les tests d'homotopie sur des surfaces à bords. Cependant, toute surface à bords $\mathcal{M}$ peut être étendue en une surface sans bord $\bar{\mathcal{M}}$ contenant $\mathcal{M}$, en collant une « poignée » à chaque bord, voir la figure 2.3. Il est intuitivement clair qu'un chemin inclus dans $\mathcal{M}$ est contractile dans $\mathcal{M}$ si et seulement si il l'est dans $\bar{\mathcal{M}}$; une démonstration rigoureuse de ce fait est immédiate en utilisant un théorème classique de topologie algébrique, le théorème de Seifert–Van Kampen (voir par exemple [145, pp. 124–132]). On en déduit donc, à l'aide de l'algorithme de Dey et Guha [53], que le problème de déterminer si deux cycles sont homotopes sur une surface orientable à bords est résoluble en temps $O(n + k_1 + k_2)$.

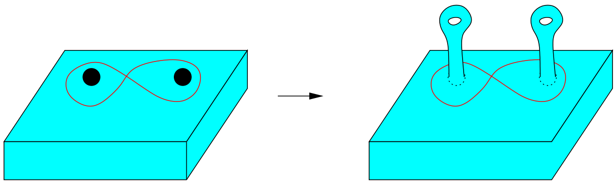


FIG. 2.3 – Transformation d'une surface à bords en une surface sans bord, par ajout de poignées. La surface $\mathcal{M}$ (à gauche) est une sphère (parallélépipède rectangle) à deux bords et la surface $\bar{\mathcal{M}}$ (à droite) est un double-tore, c'est-à-dire une sphère à deux poignées. Tout chemin dans $\mathcal{M}$ est contractile dans $\mathcal{M}$ si et seulement si il l'est dans $\bar{\mathcal{M}}$.

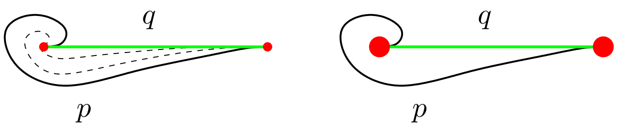


FIG. 2.4 – Les deux notions d'homotopie où les extrémités des chemins sont des obstacles. Premier modèle, à gauche : les extrémités des chemins sont des « punaises » ; les deux chemins p et q sont homotopes, p pouvant pivoter autour de son extrémité gauche (quelques étapes de l'homotopie sont représentées en pointillé). Second modèle, à droite : les obstacles sont des disques et les deux chemins p et q ne sont plus homotopes.

2.2.2.4 Le cas du plan

À notre connaissance, seul un article de Cabello, Liu, Mantler et Snoeyink [25] évoque le problème du test de contractibilité dans le plan en présence d'obstacles. (Plus loin, à la section 2.3.3, page 52, nous verrons que d'autres articles cherchent à calculer le plus court chemin homotope à un chemin donné dans le plan, ce qui résout en particulier ce problème, mais pas forcément avec une complexité optimale.)

Soit P un ensemble de points du plan, appelés obstacles ; on cherche à décider si deux chemins sont homotopes dans $\mathbf{R}^2 \setminus P$. En fait, on peut définir, outre la notion d'homotopie habituelle où les courbes sont disjointes des obstacles, deux notions alternatives d'homotopie, où les extrémités des chemins sont eux-mêmes des obstacles (figure 2.4) :

- le cas où les les extrémités des chemins sont « punaisés » sur un point de P : un chemin c est une fonction continue de l'ouvert $]0,1[$ dans le plan privé de P, avec $\lim_{0^+} c$ et $\lim_{1^-} c$ appartenant à P ;
- le cas où les extrémités des chemins sont « attachées » sur un point de P, qui est vu comme un obstacle non ponctuel (un disque fermé de rayon ε) : un chemin est défini comme dans le cas précédent, mais les extrémités des chemins sont sur le bord du disque. Ainsi, deux chemins ayant même origine, l'un tournant autour de l'obstacle et l'autre pas, ne seront pas considérés comme étant homotopes dans cette définition alors qu'ils le seront dans la définition précédente.

Nous serons confrontés plus loin à des distinctions de ce genre ; en fait, la

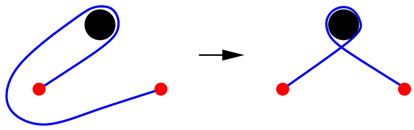


FIG. 2.5 – Le plus court chemin homotope à un chemin simple donné n'est pas nécessairement simple. La surface considérée est le plan privé d'un disque.

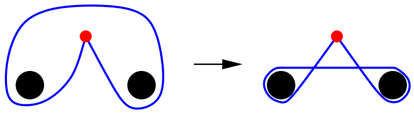


FIG. 2.6 – Le plus court lacet homotope à un lacet simple donné n'est pas nécessairement simple. La surface considérée est le plan privé de deux disques.

démonstration du théorème 3.2, dans le chapitre 3, consistera justement à jongler entre ces deux notions. L'article de Cabello *et al.* [25] s'applique indifféremment à la notion standard d'homotopie ou à l'une de ces deux précédentes. Le cas de la notion habituelle est plus délicat quand on manipule des chemins simples, car le plus court chemin homotope à un chemin simple donné peut contenir des croisements, comme le montre la figure 2.5. Le même phénomène se produit pour les lacets, voir la figure 2.6.

Supposons que p et q soient des chemins polygonaux de complexité n, l'ensemble P contenant également n points. Dans le cas où p et q sont chacun simples, mais peuvent toutefois s'intersecter entre eux, Cabello *et al.* ont donné un algorithme de complexité $O(n \log n)$ pour tester si p et q sont homotopes dans $\mathbf{R}^2 \setminus P$. Leur méthode se décompose en trois étapes :

- *condenser* les chemins p et q, en les stockant sous une forme qui fasse abstraction de leurs propriétés géométriques mais qui conserve néanmoins l'information de leur classe d'homotopie. Cela consiste à définir une « relation de verticalité »[3] contenant les points de P ainsi que les morceaux x-monotones de p et q ;
- rendre *canoniques* ces représentations, en court-circuitant les portions inutiles ;
- *comparer* les deux représentations (cette étape n'est pas évidente, la mise sous forme canonique ne garantissant pas tout à fait que deux chemins homotopes aient la même forme).

Dans le cas où les chemins p et q ne sont pas nécessairement simples, les auteurs ont donné un algorithme de complexité $O(n^{3/2})$. Nous ne donnerons pas les détails de cet algorithme qui fait appel à de nombreux résultats et structures de données de géométrie algorithmique (intersections entre segments rouges et bleus, recherche orthogonale, nombre de croisements d'un graphe, etc.). Le problème du test d'homotopie entre p et q (non simples) est en fait au moins aussi difficile que le problème d'*Hopcroft*, qui semble ne pas être résoluble en moins de $O(n^{4/3})$.

[3]aboveness relation, en anglais.

2.2.2.5 Extensions

Toutes les questions que nous avons abordées dans le cas des surfaces pourraient l'être dans le cas d'objets plus généraux ou en dimension supérieure. Mais on se heurte rapidement à des problèmes indécidables. Il existe des complexes simpliciaux de dimension 2, ou des 4-variétés, pour lesquels le problème de la contractibilité est indécidable : en effet, n'importe quel groupe admettant une présentation finie est le groupe fondamental d'un complexe simplicial de dimension 2 (et aussi d'une variété de dimension 4), et le problème de savoir, dans un tel groupe, si un élément est l'élément neutre est en général indécidable. Voir Stillwell [145, p. 247] qui mentionne d'autres résultats relatifs à ces questions.

On ne connaît pas la complexité de ces problèmes pour les variétés de dimension 3, mais ils sont supposés être très difficiles : indépendamment des questions algorithmiques, la classification des 3-variétés n'est pas connue. Un point clé dans cette direction serait de démontrer la *conjecture de Poincaré*, qui dit qu'une 3-variété compacte, connexe, simplement connexe et sans bord est homéomorphe à S^3. Des travaux récents dûs à Perelman semblent être une avancée importante dans la démonstration de cette conjecture [125, 126].

2.2.3 Décroisement de courbes

Une autre question qui a suscité un certain intérêt est la suivante : étant donnée une courbe (chemin ou cycle) sur $\mathcal{M}$, existe-t-il une courbe simple qui lui est homotope ? Plus généralement, étant donnée une famille de courbes $C = (C_1, \dots, C_n)$, comment « décroiser » ces courbes, au sens suivant : trouver $C' = (C'_1, \dots, C'_n)$ tel que C_i et C'_i sont homotopes pour tout i, les courbes de C' ayant le moins d'intersections possible ?

2.2.3.1 Une méthode peu constructive

Poincaré a donné, en 1904, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un lacet soit homotope à un lacet simple, sur une surface sans bord orientable $\mathcal{M}$. On se souvient que le revêtement universel du tore consiste en un pavage régulier du plan par des carrés. Une telle construction est impossible avec la métrique euclidienne pour des surfaces de genre plus élevé : pour le double-tore, par exemple, il faudrait paver le plan par des octogones réguliers, chaque sommet étant incident à huit octogones. Ceci est néanmoins possible avec une métrique non euclidienne : on peut paver le disque hyperbolique (appelé aussi *disque de Poincaré*) par un tel assemblage (voir la figure 2.7, et [149] pour une description détaillée de cette métrique). Soit ℓ un lacet et soit $\widetilde{\ell}$ un relevé de ℓ dans le revêtement universel ainsi construit ; soient a et b les extrémités de ℓ et soit ℓ' la projection sur $\mathcal{M}$ de l'unique chemin géodésique entre a et b ; ℓ' est homotope à ℓ. Considérons l'ensemble des relevés de ℓ' ; il est évident que, s'ils sont deux à deux disjoints sauf en leurs extrémités, alors ℓ' est simple, et donc ℓ est homotope à un lacet simple. Poincaré a démontré la réciproque : ℓ est homotope à un lacet simple si et seulement si les relevés de ℓ' sont deux à deux disjoints, sauf en leurs extrémités. Ainsi, ℓ est simple si et seulement si le plus court lacet homotope à ℓ l'est. Ce

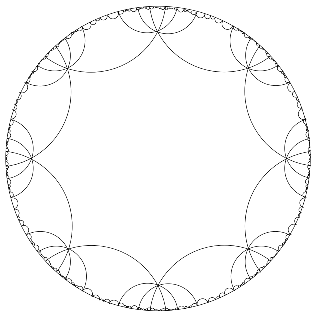


Fig. 2.7 – Un pavage du disque hyperbolique par des octogones réguliers (avec la métrique hyperbolique).

fait, remarquable, est spécifique à la métrique (hyperbolique ou euclidienne, selon le genre de la surface), comme nous l'avons vu sur la figure 2.6. Il fallut toutefois plusieurs dizaines d'années avant que ce procédé ne puisse être considéré comme étant vraiment effectif (voir [145, pp. 190–194]).

2.2.3.2 Point de vue algébrique

Chillingworth s'est aussi intéressé au problème : dans [33], il a donné une caractérisation du fait qu'un cycle soit homotope à un cycle simple. Sa méthode, algébrique, utilise le *nombre d'enroulement*[4] d'une courbe avec un champ de vecteurs. Dans [34], son résultat est étendu et permet de déterminer si une famille de cycles est « décroisable » (au sens où cette famille est représentable par une famille de cycles simples et deux à deux disjoints en maintenant les classes d'homotopie). La méthode est assez similaire, mais utilise, outre les nombres tournants, un codage de la classe d'homotopie d'une courbe en notant la liste des chemins d'un schéma polygonal croisés par cette courbe. Nous introduirons au chapitre 3, page 72, une variante de ce codage. Cependant, cela ne fournit pas de moyen pour calculer la famille de cycles simples et disjoints, si une telle famille existe.

Les travaux de Cohen et Lustig [37] et Lustig [112] sont dans la même veine : l'objectif est de compter le nombre minimal d'intersections de deux cycles dans une classe d'homotopie donnée. Les cycles sont données sous une forme algébrique (sur une base d'homotopie fournie par un schéma canonique) mais les idées utilisent le disque hyperbolique. L'algorithme a été programmé.

2.2.3.3 Utilisation de décroisements élémentaires

de Graaf et Schrijver [48] ont étudié le problème plus général suivant : étant donnée une famille de cycles $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ sur une surface (éventuellement non orientable et/ou à bords), comment est-il possible de transformer Γ en une famille $\Gamma' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_n)$ telle que, pour tout i, γ_i est homotope à γ'_i, et en minimisant le nombre de croisements de Γ' ? Ils ont montré que cela est toujours possible en utilisant quelques opérations élémentaires de décroisement, appelées *mouvements de Reidemeister*, qui n'augmentent jamais le nombre d'intersections. De plus,

[4]winding numbers, en anglais.

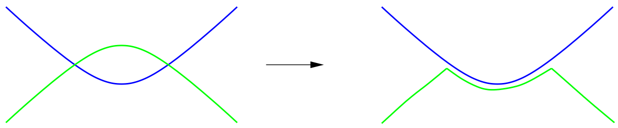


FIG. 2.8 – Un des mouvements de Reidemeister.

chaque cycle γ'_i de Γ' a un nombre minimal d'auto-intersections dans sa classe d'homotopie et, pour tout $i \neq j$, γ'_i et γ'_j se croisent un nombre minimal de fois parmi toutes les courbes γ_i et γ_j dans leurs classes d'homotopie. Ceci donne un algorithme (peu effectif en pratique, toutefois) pour calculer un tel Γ'. La démonstration de ce résultat, assez difficile, passe par l'étude des propriétés d'une (hypothétique) famille de cycles qui ne se réduirait pas à une famille à un nombre minimal d'auto-intersections par mouvements de Reidemeister, la famille étudiée ayant un nombre minimal de cycles ; elle consiste à montrer le résultat pour des surfaces simples (sphère, disque ouvert, plan projectif), puis à passer aux surfaces plus complexes en les munissant d'une structure euclidienne ou hyperbolique.

Notons qu'Hass et Scott [88] avaient étudié le même problème auparavant, dans le cas particulier d'une seule courbe ; le type de résultat qu'ils obtiennent est un peu différent, puisqu'ils cherchent des disques bordés par une ou deux portions de courbes sur la surface, pouvant contenir d'autres morceaux de courbes dans leur intérieur.

Un des mouvements de Reidemeister élémentaires consiste à « décroiser » deux cycles qui se coupent deux fois en bordant un disque topologique. Si un des cycles est le plus court possible dans sa classe d'homotopie et qu'un mouvement de Reidemeister est possible, cela signifie qu'on peut raccourcir l'autre cycle en procédant à ce mouvement de Reidemeister, sans changer sa classe d'homotopie (figure 2.8). Ce raisonnement sera généralisé et utilisé à plusieurs reprises dans les démonstrations du chapitre 3. Un ingrédient clé de ces démonstrations est de montrer qu'un certain algorithme décroise des courbes, le décroisement se faisant par de tels mouvements.

2.3 Plus courts chemins homotopes

Dans cette section, nous poursuivons notre panorama de la topologie algorithmique des courbes sur les surfaces, en mettant l'accent sur le problème suivant : étant donnée une courbe c sur une surface, trouver une courbe homotope à c qui est *optimale*, c'est-à-dire aussi courte que possible dans sa classe d'homotopie.[5] En d'autres termes, comment, en maintenant les propriétés topologiques de c, la raccourcir autant que possible ? Plus généralement, on peut considérer le problème d'optimisation simultanée de plusieurs courbes simples et deux à deux disjointes.

Cette question n'est pas purement topologique, comme l'étaient les sujets abordés dans la section précédente : aux problèmes de topologie vient se gref-

[5]Dans le chapitre 3, nous manipulerons des courbes qui sont simples. Nous dirons alors qu'une courbe est *optimale* si elle est simple et s'il n'existe aucune courbe simple plus courte dans sa classe d'homotopie ou d'isotopie.

fer une composante métrique. Nous examinerons brièvement le cas des surfaces lisses en général, avec des résultats d'existence de plus courts cycles homotopes. Nous aurons ensuite un point de vue plus algorithmique, dans le cas du plan avec obstacles, puis des surfaces localement euclidiennes. Ces questions sont au cœur de notre thèse : nous présenterons au chapitre 3 notre contribution dans ce domaine.

2.3.1 Les surfaces lisses

2.3.1.1 Le cas des surfaces hyperboliques

Nous avons déjà vu plus haut que le cas des chemins dans le disque hyperbolique est très particulier : un lacet est homotope à un lacet simple si et seulement si le plus court lacet qui lui est homotope est lui-même simple. Cela reste vrai sur toute *surface hyperbolique*, c'est-à-dire une surface localement isométrique au plan hyperbolique. En fait, dans ce contexte, il y a un unique cycle géodésique dans chaque classe d'homotopie, qui est lui-même le plus court cycle dans sa classe d'homotopie [24, théorème 1.6.6]. Tout procédé itératif qui raccourcit localement un cycle va donc converger vers un cycle optimal. Cela donne un algorithme élémentaire d'approximation de cycles optimaux sur ces surfaces, voir [24, annexe].

2.3.1.2 Le cas des surfaces à métrique riemannienne

Une *surface riemannienne* est une surface munie d'une métrique, c'est-à-dire d'une forme quadratique définie positive sur l'espace tangent en tout point, forme dépendant continûment du point de la surface considéré. Une surface plongée de façon lisse dans $\mathbf{R}^3$, munie de la métrique induite (la distance entre deux points de la surface étant la longueur du plus court chemin sur la surface entre ces deux points) est un exemple simple de surface riemannienne. Une quantité intrinsèque à chaque point d'une surface riemannienne est sa *courbure* (de Gauß). Intuitivement, la courbure d'une surface $\mathcal{M}$ en un point donne l'information suivante. Dans le plan, le rapport entre la circonférence et le rayon d'un cercle est égale à 2π. Cette propriété n'est plus vraie dans le cas général : sur une sphère, si r est assez petit, l'ensemble des points à distance (géodésique) r d'un point p est un cercle de circonférence plus petite que $2\pi r$. Sur une selle de cheval ou une chips, la circonférence est plus grande que $2\pi r$. La courbure de $\mathcal{M}$ en p est nulle, positive ou négative selon que la circonférence d'un cercle de rayon r centré en p, divisée par r, a une limite égale, inférieure ou supérieure à 2π quand r tend vers 0. Une surface hyperbolique est, en fait, une surface riemannienne de courbure constante égale à -1.

Un résultat de 1929, dû à Lusternik et Schnirelmann [111], est que toute surface riemannienne homéomorphe à la sphère contient au moins trois géodésiques fermées simples. Dans le cas général, tout cycle simple non contractile admet au moins un plus court cycle qui lui est homotope et, de plus, tout tel cycle est nécessairement simple si la surface est orientable (résultat dû à Freedman, Hass et Scott [75]). Plus généralement, considérons un nombre fini de cycles sur une surface riemannienne, tous aussi courts que possible dans leurs classes d'homotopie.

Que peut-on dire sur la façon dont ces cycles se croisent ? Il paraît plausible qu'ils aient un nombre minimal d'intersections permises par leurs classes d'homotopie ; cela a été aussi montré dans [75]. Réciproquement, Neumann-Coto [121] a démontré que tout ensemble fini de cycles se croisant minimalement est un ensemble de géodésiques, aussi courtes que possible dans leurs classes d'homotopie, pour une certaine métrique. Pour un ouvrage général sur les géodésiques fermées, on pourra consulter [102].

2.3.1.3 Transformations continues de courbes en géodésiques

Mentionnons maintenant divers procédés qui permettent de transformer une courbe tracée sur une surface riemannienne en une géodésique. Ceux-ci ne calculent pas (en général) des plus courts chemins homotopes, mais ont été assez abondamment étudiés.

Le processus de Birkhoff [16], découvert en 1917, constitue un moyen très simple dans ce but. L'idée est, partant d'une courbe paramétrée par sa longueur, d'échantillonner régulièrement cette courbe par un nombre fini de points et de remplacer chaque portion de courbe entre deux points consécutifs par un segment géodésique. On recommence en prenant comme échantillonnage de la nouvelle courbe l'ensemble des milieux des segments géodésiques ainsi construits.

En 1993, Hass et Scott [89] ont donné un algorithme élémentaire pour déformer une ou plusieurs courbes en des géodésiques. Contrairement au processus de Birkhoff, leur procédé satisfait de façon évidente le fait que le nombre d'intersections ou d'auto-intersections entre courbes ne peut que décroître au cours de l'algorithme. L'idée est de prendre une famille de disques couvrant la surface et de raccourcir chaque portion maximale de courbe à l'intérieur d'un disque en remplaçant cette portion de courbe par un plus court chemin dans ce disque.

Un autre type d'évolution de courbes, faisant intervenir la courbure, est le suivant. Considérons un cycle tracé dans le plan ou sur une surface riemannienne. Faisons évoluer la courbe ainsi : chaque point de la courbe se déplace dans la direction de son vecteur normal en tout point, avec une certaine vitesse. Cela mène à un type d'équations aux dérivées partielles qui se retrouve fréquemment en physique (mécanique des fluides, science des matériaux), quand la courbe représente une *interface* entre deux milieux (voir [138] pour un ouvrage dédié au sujet). En particulier, si chaque point de la courbe évolue à une vitesse proportionnelle à la courbure de la courbe en ce point, en direction du centre de courbure, il s'agit d'un problème de *raccourcissement de courbes*[6]. Le comportement de ce processus a été bien étudié. Dans le cas du plan, si la courbe de départ est simple, elle demeure simple durant tout le processus d'évolution ; à partir d'un certain temps, elle est convexe et se rétracte en un point [82]. Dans le cas des surfaces riemanniennes, la courbe peut converger vers un point ou vers une géodésique fermée [83, 78]. Il s'agit donc d'un procédé de raccourcissement de cycle sur une surface qui maintient sa classe d'homotopie et sa simplicité au cours de la déformation.

[6] curve shortening, en anglais.

2.3.2 Le cas des « surfaces planes »

Hershberger et Snoeyink [94], en 1994, ont trouvé un algorithme qui permet de calculer le plus court chemin homotope à un chemin donné, dans le cadre suivant. Les surfaces considérées sont des surfaces à bord, triangulées, de telle sorte que les sommets de la triangulation sont sur le bord de la surface. De plus, chaque arête a une longueur et chaque triangle est muni de la métrique euclidienne induite par les longueurs de ses arêtes. Un exemple de surface possible est un polygone à trous dans le plan : il est toujours possible de trianguler un tel polygone sans ajouter de sommets. Soit $\mathcal{M}$ une telle surface.

La méthode consiste à calculer une portion S du revêtement universel de $\mathcal{M}$ qui contient un relevé du chemin p donné en entrée. Comme la surface n'a pas de sommet intérieur, nous savons, d'après la section 1.4.4.3, construire S. Appelons a et b les extrémités de p. Montrons que le plus court chemin q dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ entre a et b est dans S. Si tel n'était pas le cas, comme le graphe dual de $\widetilde{\mathcal{M}}$ est un arbre, q devrait franchir deux fois, dans des sens opposés, une arête de S ; cela contredit la définition d'un plus court chemin. Il suffit donc de calculer un plus court chemin dans S entre a et b. L'algorithme de l'entonnoir (section 2.1.2) s'applique tel quel pour résoudre ce problème, bien que S ne soit pas nécessairement plongeable isométriquement dans le plan.

L'algorithme s'étend, avec une modification simple, pour calculer le plus court cycle homotope à un cycle donné.

2.3.3 Le cas du plan

Deux articles très récents traitent de l'optimisation d'un nombre fini de chemins dans le cas particulier du plan avec obstacles : l'objectif est de tirer parti des techniques de géométrie algorithmique pour donner des algorithmes de calcul efficaces.

En 2002, Efrat, Kobourov et Lubiw [65] se sont intéressés au problème suivant. Soit $C = (C_1, \ldots, C_p)$ une famille de chemins simples et deux à deux disjoints du plan ; soit P un ensemble de n points du plan, contenant les extrémités des chemins de C mais aucun autre point de C. L'objectif est d'*optimiser* les chemins de C, c'est-à-dire de trouver une famille $C' = (C'_1, \ldots, C'_p)$ de chemins simples et deux à deux disjoints, tels que C_i et C'_i soient homotopes pour tout i, avec les C'_i aussi courts que possible. (Les auteurs considèrent le premier des deux modèles d'homotopie introduits pour les obstacles ponctuels, indiqués à la section 2.2.2.4, page 45, et non la notion habituelle d'homotopie.)

En fait, les chemins résultants sont autorisés à s'intersecter ou à s'auto-intersecter, en se longeant, pourvu qu'ils ne se croisent pas (nous avons rencontré une situation semblable à la fin de la section 2.1.2, page 38, lors de la description de [124]). La raison de cette modélisation est que, sans cette convention, une famille optimale C' n'existerait pas forcément, l'espace des configurations étant ouvert.

La première étape consiste à créer des « courts-circuits » dans les chemins d'entrée, tout en maintenant leur simplicité. La remarque cruciale est qu'alors, beaucoup de morceaux de chemins ainsi obtenus se superposent : la réunion des chemins est en fait constituée de $O(n)$ lignes polygonales x-monotones, chacune d'elles correspondant à plusieurs morceaux de chemins se longeant. La deuxième étape consiste donc à raccourcir ces portions de chemins en utilisant l'algorithme de l'entonnoir, en s'aidant des plus courts chemins déjà calculés. Enfin, on recolle les morceaux de chemins qui constitueront la sortie de l'algorithme.

Une restriction importante de cet article est que l'homotopie au sens usuel n'est pas considérée : les extrémités des chemins font nécessairement partie des obstacles. Dans ce cas particulier, deux chemins simples homotopes sont isotopes (voir [67, 71]). De plus, chaque chemin résultant est un plus court chemin d'une classe d'homotopie fixée, et est simple. Nous rencontrerons des situations semblables au chapitre 3.

Bespamyatnikh [13] a amélioré l'algorithme précédent. En accélérant la deuxième étape, il se ramène à des calculs de plus courts chemins dans des polygones monotones, obtenant une complexité $O(k + n \log n)$, k étant la taille de l'entrée et de la sortie et n le nombre d'obstacles. Il donne également un algorithme dans le cas où les chemins d'entrée ne sont pas simples.

2.4 Applications

Dans cette section, nous passons en revue les applications des domaines que nous venons d'introduire. Nous évoquons d'abord la thématique des géodésiques et plus courts chemins en général. Nous expliquerons ensuite pourquoi les décompositions de surfaces sont utiles dans plusieurs domaines. Enfin, nous donnerons des applications des calculs de plus courts chemins homotopes. Le travail que nous présenterons au chapitre suivant entre tout à fait dans ce cadre.

2.4.1 Applications des plus courts chemins

Nous excluons ici le cas des plus courts chemins dans les graphes, dont les applications sont innombrables, pour nous focaliser sur les plus courts chemins (ou géodésiques) dans des espaces métriques.

Les plus courts chemins sont des objets qui apparaissent naturellement en physique. La loi de Snell–Descartes indique comment la lumière se réfracte à la frontière de deux milieux homogènes d'indices différents ; elle se formule exactement en disant que la trajectoire de la lumière entre deux points est le plus court chemin entre ces points. Les ondes se propagent de la même façon : les radars et les sonars exploitent cette propriété, en émettant des ondes et en mesurant le temps nécessaire à leur retour. On trouve aussi des applications des plus courts chemins en analyse sismique [138, pp. 298–304].

Les problèmes de plus courts chemins se trouvent aussi en robotique (voir par exemple [101] ou [87]). Dans les problèmes de planification de trajectoires de robots dans une scène avec des obstacles, il est naturel de vouloir optimiser les déplacements. Le problème général est bien sûr nettement plus compliqué : il faut tenir compte des dimensions du robot, qui ne peut pas forcément être considéré comme un objet ponctuel ; généralement, le critère que l'on souhaite optimiser est le temps d'exécution d'une tâche donnée, et il faut tenir compte de la dynamique du robot.

Étant donné un ensemble de points P dans un espace métrique, le *diagramme de Voronoï* de P est la décomposition de l'espace induite par les ensembles de points de l'espace qui ont le même plus proche voisin parmi les points de P. Les diagrammes de Voronoï dans le plan ont été extensivement étudiés en géométrie algorithmique (voir par exemple [19]) et sont, on le voit, directement reliés aux problèmes de plus courts chemins. En particulier, le calcul d'un diagramme de Voronoï sur une surface doit utiliser la notion de distance (géodésique) entre deux points de la surface.

En conception assistée par ordinateur et en modélisation géométrique, les géodésiques ou les plus courts chemins sont aussi utilisés. Un utilisateur désirant tracer un chemin entre deux points peut vouloir préciser les deux points extrêmes de la courbe à tracer, puis laisser le logiciel trouver le plus court chemin ; si le résultat ne le satisfait pas, il pourra spécifier de nouveaux points de contrôle. Le plus court chemin entre deux points est alors simplement utilisé comme un choix « canonique ». Bien entendu, cette notion a des limites : une petite perturbation de la surface peut faire varier le plus court chemin entre deux points du tout au tout. Mais c'est l'outil naturel de la règle dans le plan qui est généralisé au cas d'une surface.

2.4.2 Applications des découpages de surface courts

Nous indiquons maintenant quelques applications des calculs de décompositions de surfaces (par un schéma polygonal ou une décomposition en pantalons). On cherche à obtenir des décompositions courtes dans la plupart de ces applications, qui concernent souvent l'informatique graphique : dans ce domaine, les tracés inutilement complexes sont bannis.

2.4.2.1 Paramétrage

Le *paramétrage de surfaces* [72, 50] est un outil essentiel en informatique graphique. Paramétrer une surface $\mathcal{M}$, c'est la mettre en correspondance avec un domaine du plan (souvent un disque topologique, mais éventuellement plusieurs disques ou encore plusieurs surfaces planaires à bords). Une correspondance bijective entre $\mathcal{M}$ et une région du plan n'existe bien entendu que si $\mathcal{M}$ est une surface orientable de genre nul, à au moins un bord. Dans le cas général, le problème du paramétrage se décompose en deux sous-problèmes :

1. on commence par décomposer la surface en surfaces planaires (à l'aide d'un schéma polygonal ou en découpant la surface en plusieurs disques topologiques ; la décomposition en pantalons pourrait aussi être utile). Cette étape influe sur la qualité du paramétrage : pour éviter des artefacts visibles (en plaquage de texture ou dans la création d'un maillage), la découpe doit être aussi courte que possible. Le chapitre 3 fournira, entre autres, une méthode pour créer un tel découpage avec des chemins courts ;

2. chacune de ces surfaces est ensuite mise en correspondance (via un homéomorphisme affine par morceaux, la surface étant très souvent polyédrale) avec une région du plan. Nous verrons au chapitre 4 un moyen de créer un tel homéomorphisme grâce au théorème de plongement barycentrique de Tutte. En pratique, on souhaite généralement minimiser la distortion de la mise en correspondance ; ceci est un sous-problème important du problème du paramétrage, et des approches comme [72] se fondent sur le théorème de Tutte.

Nous mentionnons maintenant une liste d'applications utilisant le paramétrage.

Visualisation. Le paramétrage d'une surface en fournit une représentation dans le plan. Cela permet de voir la surface dans son entier (il n'y a pas de faces cachées), d'y représenter facilement des informations (si chaque point de la surface est muni d'une couleur, par exemple) ; c'est exactement ce que l'on fait en cartographie, en représentant la terre sur un domaine planaire. Le paramétrage est l'outil algorithmique naturel correspondant aux notions de cartes et d'atlas en géométrie différentielle. Lorsque la surface est affichée sous forme de schéma polygonal, on dispose d'un *patron* de la surface, ce qui permet aussi de visualiser sa topologie.

Plaquage de texture. En informatique graphique, une opération courante consiste à donner à une surface donnée l'aspect d'un certain matériau (bois, tissu, ...). Ceci est réalisé par *plaquage de texture* : on met en correspondance la surface avec un rectangle contenant un motif coloré représentant le matériau, appelé *texture* [113, 109, 127]. La décomposition de la surface initiale en surfaces planaires est alors nécessaire. Bien entendu, lorsque l'on met en correspondance la ou les surfaces planaires avec la texture, il faut prendre garde aux conditions de recollement du schéma polygonal : autrement, on obtiendrait des discontinuités de la texture aux endroits où l'on a découpé la surface.

Lors du plaquage de texture sur des surfaces complexes, une technique consiste à découper la surface le long des points de courbure maximale : cela permet de minimiser la distortion lors du paramétrage. Le découpage prend alors un nouvel intérêt. En fait, il est possible, lors du découpage en schéma polygonal, de favoriser la découpe le long de certaines zones de courbure, en affectant un coût moins élevé aux zones de forte courbure. Si cela ne suffit pas, rien n'empêche de continuer à découper la surface.

Maillage et calcul numérique. Les équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles sont pléthoriques en physique et il est crucial de pouvoir les simuler. On a alors recours aux méthodes d'analyse numérique par *éléments finis*, c'est-à-dire que l'on discrétise l'espace sur lequel on travaille, en le maillant [76]. La forme des éléments du maillage résultant a une influence directe sur l'efficacité de la simulation numérique : on cherche généralement à avoir des éléments aussi réguliers que possibles (pas de triangles avec de petits angles) et à avoir un maillage plus raffiné à certains endroits.

Pour une surface dans $\mathbf{R}^3$, le calcul d'un tel maillage peut passer par une étape de paramétrage de la surface. Le paramétrage permet souvent de se ramener à des calculs dans le plan, ce qui les rend plus simples et plus rapides (voir par exemple [150]).

Remaillage et compression. L'apparition des scanners tridimensionnels et la taille grandissante des maillages (plusieurs centaines de millions de polygones pour la modélisation d'un avion de ligne) ouvrent une nouvelle problématique, celle de la gestion des modèles géométriques.

Le problème du *remaillage* [4] consiste, étant donné un maillage d'une surface, à trouver un autre maillage géométriquement proche du maillage initial mais avec un nombre différent d'éléments (sommets, arêtes, faces). Cela permet, par exemple, de *simplifier* la géométrie : le maillage issu d'un scanner 3D est extrêmement régulier et de nombreux points n'apportent que peu d'information géométrique (ceux situés sur des zones planes par exemple) ; il convient de les supprimer. On peut aussi *enrichir* la géométrie : partant d'un maillage grossier, on ajoute des points qui permettent de lisser l'objet.

Remailler un maillage permet aussi de le *comprimer* efficacement, pour le stocker ou le transmettre : dans [86], une méthode de remaillage est présentée, dans laquelle le maillage résultant est stocké de façon extrêmement compacte.

Dans les articles que nous venons de citer, on utilise un paramétrage de la surface d'entrée : cela permet ensuite de travailler dans le plan. C'est aussi ce qui est fait dans l'article [2] que nous avons écrit avec P. Alliez, O. Devillers et M. Isenburg, dont le but est de remailler un objet tridimensionnel : il est nécessaire de passer par une phase de paramétrage, et donc de calcul de schéma polygonal. Le paramétrage est choisi pour être aussi conforme que possible (c'est-à-dire qu'elle doit chercher à préserver les angles), et l'on constate que la distortion introduite n'est pas nuisible au résultat (plus précisément, on arrive à compenser l'effet de cette distortion). Dans ce cas précis, il peut s'avérer préférable de décomposer la surface suivant un système fondamental de lacets plutôt que par un schéma quelconque : les sommets du schéma polygonal doivent être traités séparément et mieux vaut minimiser leur nombre.

2.4.2.2 Autres applications en informatique graphique

Nous donnons maintenant d'autres problèmes en infographie pour lesquels une décomposition topologique de surfaces peut s'avérer utile.

Analyse multi-échelles et filtrage de la topologie. L'analyse multi-échelles consiste à créer une *hiérarchie* de maillages, plus ou moins raffinés, représentant une surface donnée. Pour cela, il faut décomposer le maillage initial en surfaces topologiquement élémentaires ; cela permet d'éviter, lors de la simplification du maillage, la suppression de poignées ou de bords [59, 79]. À l'inverse, si l'on souhaite *filtrer* la topologie d'un maillage, c'est-à-dire supprimer le « bruit topologique » que constituent les petits bords et les petites poignées, un découpage de la surface peut aussi servir. Notons toutefois, dans ce dernier cas, que c'est peut-être l'utilisation du plus petit cycle essentiel qui serait le plus approprié (voir la description de [68] à la section 2.2.1.2, page 41).

Compression géométrique. Nous avons expliqué précédemment que le paramétrage de surface pouvait être utile pour la compression de modèles géométriques. Indépendamment de cela, la décomposition d'une surface (sans calcul explicite d'un paramétrage) peut servir pour la compression.

La compression d'un maillage se divise souvent en deux étapes [3]. La première consiste à stocker la combinatoire du maillage, c'est-à-dire la surface combinatoire sous-jacente au maillage : relations d'incidences entre les sommets, arêtes et faces. La seconde consiste à stocker la géométrie, c'est-à-dire les coordonnées des sommets. Au cours de la première étape, il peut être souhaitable d'avoir à stocker un complexe simplicial planaire, car des algorithmes efficaces pour coder les triangulations planaires sont connus [128]. Découper la surface pour en faire un disque topologique pourrait donc aider à la compression de la connectivité du maillage.

Métamorphoses. Une branche de l'informatique graphique vise à créer des *métamorphoses*, connues sous le nom de *morphings* en anglais (voir [106] pour une description générale et des références). Il s'agit de déformations continues entre deux objets (tridimensionnels). Ces métamorphoses sont utilisées fréquemment de nos jours pour les effets spéciaux (publicité, films, ...). Un des objectifs est de développer des outils permettant de créer automatiquement des métamorphoses entre deux surfaces de $\mathbf{R}^3$. Pour qu'une telle transformation continue existe, il faut bien entendu que les deux surfaces aient la même topologie, mais aussi qu'il existe une famille continue d'homéomorphismes de $\mathbf{R}^3$ (on appelle cela une *isotopie ambiante*) qui transforme l'une en l'autre. Par exemple, la surface d'un tore (plongé de façon standard dans $\mathbf{R}^3$) et celle d'une corde nouée ont toutes deux la même topologie, mais on ne peut pas espérer créer une déformation continue sans créer d'auto-intersection entre les deux. Une étape pour atteindre ce but (qui semble bien lointain !) peut être de décomposer les surfaces à l'aide de schémas polygonaux, ce qui permet au moins de calculer un homéomorphisme entre les deux. Pour cela, il faut utiliser des schémas canoniques : si la succession des arêtes des deux schémas polygonaux n'est pas la même (par exemple $ab\bar{a}\bar{b}cd\bar{c}\bar{d}$ pour l'un et $abcd\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$ pour l'autre), la mise en correspondance entre les deux schémas n'induit pas un homéomorphisme entre les deux surfaces.

2.4.3 Applications des calculs de plus courts chemins homotopes

Les résultats du chapitre 3 permettent non seulement de raccourcir des décompositions de surfaces, mais aussi de trouver un plus court chemin simple parmi les chemins homotopes à un chemin simple donné. Nous nous intéressons ici aux applications de ces résultats.

Nous avons évoqué le domaine de la robotique pour justifier l'intérêt des calculs de plus courts chemins. Cela est toujours le cas pour les calculs de plus courts chemins à classe d'homotopie fixée : il peut être nécessaire d'imposer à un robot de passer à certains endroits. Optimiser un parcours de slalom (marqué avec des balises) revient à calculer un plus court chemin homotope par rapport aux obstacles que sont les balises !

Les plus courts chemins homotopes sont utilisés dans les systèmes de VLSI (Very Large-Scale Integration) : le problème est d'arriver à connecter entre elles des broches de différents composants électroniques d'une puce, en minimisant la longueur des connexions. Si l'on se place dans un cadre planaire et que l'on spécifie la topologie des branchements, le problème revient à calculer des plus courts chemins à classe d'homotopie fixée. On veut en outre savoir si ces connexions sont possibles sans croisement, c'est-à-dire imposer le fait que les fils soient simples et sans intersections [108].

Un autre domaine d'application est celui de la cartographie et des systèmes d'information géographique (Geographic Information Systems). De façon schématique, une carte est stockée sous forme de lignes polygonales, séparant le plan en régions. Dans de nombreuses situations, une résolution précise n'est pas nécessaire (les détails ne seraient de toute façon visibles qu'à partir d'un certain niveau de zoom) et est nuisible (les temps de calcul et d'affichage sont accrus). Il faut donc savoir *simplifier* la géométrie d'une ligne polygonale, en maintenant notammant : la géométrie de la courbe (la nouvelle ne doit pas être trop éloignée de l'ancienne), la position de la courbe par rapport à certains points (après simplification, les villes côtières doivent apparaître sur la terre ferme) et la simplicité de la courbe simplifiée ; voir [47] pour plus de détails. Les deux dernières conditions sont des conditions topologiques d'homotopie et de simplicité, auxquelles le chapitre suivant s'intéressera.

Une application très concrète du calcul de plus court chemin simple homotope nous a été présentée[7]. Certains appareils, tels les téléviseurs, émettent un champ électromagnétique à l'aide d'un canon à électrons. Celui-ci est constitué d'une bobine de fil de cuivre enroulée sur une surface assez complexe par un robot. Diverses surfaces peuvent convenir, mais il est souhaitable de minimiser ses dimensions (sa profondeur en particulier) tout en maintenant certaines propriétés du champ ainsi créé. On souhaite donc pouvoir calculer le champ électromagnétique engendré par une telle bobine en fonction de la surface choisie. Une première étape consiste donc à calculer la position que doit avoir le fil ; cela revient exactement à calculer un plus court chemin, avec une classe d'homotopie donnée ; ce chemin est simple car le fil ne se superpose pas.

Pour toutes ces applications, toutefois, la surface est relativement simple, et, en particulier, on a du mal à imaginer des applications dans le cas des surfaces avec des poignées. Mais un autre domaine d'application est la conception assistée par ordinateur, où les surfaces considérées en pratique sont susceptibles d'avoir un genre non nul. Par exemple, un opérateur doit tracer un chemin sur une surface, le long duquel la surface sera découpée. Pour obtenir un tracé propre, il est naturel de vouloir améliorer la *géométrie*, c'est-à-dire remplacer le chemin initial par un plus court chemin. Pour autant, on ne souhaite pas modifier la *topologie* qui est prescrite par l'utilisateur : le nouveau chemin doit être dans la même classe

[7]Communication personnelle de Dominique Michelucci ; qu'il en soit ici sincèrement remercié.

d'homotopie que l'ancien et doit rester simple. Nos algorithmes d'optimisation répondent en particulier à cet objectif.

Discussion

L'état de l'art que nous venons de présenter montre que les problèmes de topologie de courbes sur les surfaces, d'un point de vue fondamental comme pour les applications, sont reconnus comme étant intéressants. En particulier, les questions de raccourcissement de courbes à homotopie donnée et de décomposition de surfaces ont fait l'objet d'actifs travaux. Cependant, ces résultats constituent des avancées dans certains cas bien particuliers et les problèmes, complexes, sont loin d'être résolus dans tous les cas.

Concernant les décompositions topologiques de surfaces, les travaux antérieurs contiennent des algorithmes importants pour calculer des schémas polygonaux. S'appuyant souvent sur des démonstrations classiques de théorèmes de topologie, qu'ils exploitent avec un œil nouveau, ils donnent des bornes asymptotiques sur la complexité de ces problèmes et sur la taille des schémas résultants (voir [154, 105]). Ces décompositions sont en particulier utiles pour calculer des portions de revêtement universel [135, 54]. Mais, géométriquement, elles ne sont pas satisfaisantes : en vue des applications, notamment graphiques, il est nécessaire d'obtenir des décompositions de surfaces dont les courbes sont plus courtes et régulières. Une possibilité est de traiter les courbes résultant d'une décomposition par un lissage géodésique, comme proposé à la fin de [105], mais cela se révèle insuffisant pour des surfaces complexes (la notion de géodésique est seulement locale, contrairement à celle de plus court chemin). À un problème *topologique* vient donc s'ajouter un problème d'*optimisation*. L'article d'Erickson et Har-Peled [68] (quasiment simultané à la publication de notre premier travail sur le sujet) constitue une première réponse : un problème assez général est NP-difficile, mais il existe un algorithme d'approximation en temps polynomial. À notre connaissance, cet algorithme n'a pas été programmé ; en l'absence de résultats expérimentaux, il est difficile de savoir si l'approximation est raisonnable en pratique. Notre travail fournit un algorithme polynomial résolvant de façon exacte un problème un peu différent.

Concernant les calculs d'homotopie de courbes sur des surfaces, les tests de contractibilité et d'homotopie ont été bien étudiés [135, 54, 53] et l'on dispose aussi d'algorithmes pour déterminer le nombre minimal d'intersections entre courbes dans des classes d'homotopie données [34, 37, 112]. Quand on s'intéresse au calcul de plus courts chemins homotopes (ajoutant donc, comme au paragraphe précédent, un problème d'optimisation aux questions de nature purement topologique), on s'aperçoit que ce problème a été posé à de nombreuses reprises et que des solutions ont été trouvées dans certains cas particuliers (dans le plan [25, 65, 13] ou sur des surfaces localement isométriques à des parties du plan [94]), en utilisant des méthodes et structures de données avancées de géométrie algorithmique et, parfois, en les agençant de façon fort complexe et astucieuse. Mais aucune approche générale n'a été donnée pour ce problème.

La contribution du chapitre suivant a pour objectif d'avancer dans ces deux directions. Nous nous plaçons sur une surface munie d'une métrique, et nous cherchons à optimiser une famille de courbes (calculer la plus courte famille qui a les mêmes propriétés topologiques). Cela passe par une décomposition de la surface en surfaces topologiquement élémentaires ; en particulier, une telle décomposition, ou une seule courbe, peut être raccourcie grâce à nos algorithmes.

Chapitre 3

Optimisation de courbes sur des surfaces

Résumé. Dans ce chapitre, nous cherchons à *optimiser* des familles de courbes, c'est-à-dire à les raccourcir en maintenant certaines de leurs propriétés topologiques. Soit $\mathcal{M}$ une surface orientable ; soit G un graphe valué plongé sur $\mathcal{M}$. Convenons que la longueur d'une courbe sur $\mathcal{M}$ est la somme des poids des arêtes de G croisées par la courbe. Cela modélise en particulier le cas où la surface $\mathcal{M}$ est polyédrale, et où les courbes sont des chemins dans le graphe sommets-arêtes de la surface.

Nous considérons deux types de familles de courbes à optimiser : étant donné un plongement de graphe dans $\mathcal{M}$, nous cherchons le plus court plongement de graphe isotope, à sommets fixés ; étant donnée une famille de cycles simples et deux à deux disjoints, nous cherchons la plus courte famille de cycles simples et deux à deux disjoints dont les cycles soient homotopes aux cycles de la première famille. Cela englobe en particulier le cas d'un seul chemin ou cycle simple, d'un système fondamental de lacets, ou d'une décomposition en pantalons.

La méthode que nous proposons consiste à compléter ces courbes en une décomposition topologique de la surface, que l'on optimise avec des procédés gloutons. L'analyse de ces procédés d'optimisation fournit des résultats d'*optimalité individuelle* de chacune des courbes de la famille résultante, et de *simplicité* d'une plus courte courbe homotope à une courbe simple donnée. Nous obtenons des algorithmes pour optimiser des familles de courbes dans le graphe sommets-arêtes d'une surface polyédrale qui sont polynomiaux en l'entrée de l'algorithme et en le rapport des poids extrêmes des arêtes de la surface.

Introduction

Soit $\mathcal{M}$ une surface compacte, connexe, orientable, éventuellement à bords. Soit G un graphe valué plongé sur $\mathcal{M}$. Étant donnée une courbe c, sa *longueur* est définie comme étant la somme des poids des arêtes de G croisées par c (en comptant les multiplicités).

Dans ce chapitre, nous allons considérer deux types de plongements de courbes :

– des plongements de graphes sur $\mathcal{M}$, le graphe étant sans sommet isolé et pouvant avoir des boucles et des arêtes multiples ; en d'autres termes, une famille de chemins simples et deux à deux disjoints, sauf éventuellement en des extrémités communes ;
– des *plongements de cycles* sur $\mathcal{M}$, c'est-à-dire des familles de cycles simples et deux à deux disjoints sur $\mathcal{M}$.

Les *courbes* que nous considérons sont les chemins d'un plongement de graphe ou les cycles d'un plongement de cycles. Un plongement de graphe ou de cycles sera noté $s = (s_1, \ldots, s_n)$, où les s_i sont les courbes du plongement.

Nous souhaitons *optimiser* de tels plongements, c'est-à-dire raccourcir autant que possible leurs courbes (à extrémités fixées, dans le cas d'un plongement de graphe) en maintenant certaines de leurs propriétés topologiques : nous imposons que les courbes obtenues soient homotopes ou isotopes aux courbes de départ.

Soit $s = (s_1, \ldots, s_n)$ un plongement de graphe ou de cycles. La façon dont nous procédons pour optimiser s est la suivante :

1. nous *complétons* $s = (s_1, \ldots, s_n)$ en ajoutant des courbes, pour obtenir un plongement de graphe ou de cycles $(s_1, \ldots, s_N)$ (avec $N \geqslant n$) qui décompose la surface $\mathcal{M}$ en des surfaces topologiquement élémentaires (disques, cylindres, pantalons). Un tel plongement de graphe ou de cycles sera appelé *système de découpage* ;
2. nous *optimisons* le système de découpage $(s_1, \ldots, s_N)$ à l'aide d'un processus itératif assez simple, obtenant ainsi un système de découpage $(s'_1, \ldots, s'_N)$. Nous démontrons que, pour tout i, s'_i est une courbe qui a les mêmes propriétés topologiques que s_i et est aussi courte que possible parmi les courbes ayant ces propriétés ;
3. nous *extrayons* de $(s'_1, \ldots, s'_N)$ les n premières courbes $(s'_1, \ldots, s'_n)$, qui constituent le plongement optimal s' voulu.

Plus spécifiquement, après l'étape 2 :

– pour des systèmes de découpage par cycles, chaque cycle s'_i est aussi court que possible parmi les cycles (non nécessairement simples) homotopes à s_i ;
– pour des systèmes de découpage par graphe, chaque chemin s'_i est aussi court que possible parmi les chemins simples isotopes à s_i dans $\mathcal{M}$ privé des sommets de s non extrémités de s_i.

L'étape la plus difficile est l'étape 2 : bien que le processus d'optimisation soit relativement aisé à comprendre, la démonstration de l'optimalité du résultat est délicate, notamment dans le cas des cycles. La première étape n'est pas très difficile et la troisième est triviale. Les systèmes de découpage sont à rapprocher des schémas polygonaux et des décompositions en pantalons, en ce sens que ceux-ci décomposent aussi une surface en surfaces topologiquement élémentaires. D'ailleurs, on peut appliquer ces procédés aux schémas polygonaux et aux décompositions en pantalons.

Les courbes de s' sont donc, *chacune, individuellement*, aussi courtes que possible parmi les courbes qui ont les mêmes propriétés topologiques. En particulier, cela permet de montrer les théorèmes suivants :

- soit c un chemin simple dont les extrémités sont sur le bord de $\mathcal{M}$ et soit C l'ensemble des chemins (non nécessairement simples) de longueur minimale parmi ceux qui sont homotopes à c. Il existe un élément de C qui est simple (ce résultat est faux en général si les extrémités ne sont pas sur le bord de $\mathcal{M}$) ;
- soit γ un cycle simple et soit Γ l'ensemble des cycles (non nécessairement simples) de longueur minimale parmi ceux qui sont homotopes à γ. Il existe un élément de Γ qui est simple ;
- étant donné un système fondamental de lacets $s = (s_1, \dots, s_n)$ sur $\mathcal{M}$ (supposée sans bord dans ce cas), tout plus court système fondamental de lacets $t = (t_1, \dots, t_n)$ tel que s_i est homotope à t_i pour tout i, est constitué de lacets t_i qui sont individuellement aussi courts que possible parmi les lacets simples qui sont homotopes à s_i ;
- étant donnée une décomposition en pantalons $s = (s_1, \dots, s_n)$ sur $\mathcal{M}$, toute plus courte décomposition en pantalons $t = (t_1, \dots, t_n)$ telle que s_i est homotope à t_i pour tout i, est constituée de cycles t_i qui sont individuellement aussi courts que possible parmi les cycles homotopes à s_i.

Un cas particulier important est le cas où la surface $\mathcal{M}$ est une surface polyédrale et où le graphe G est le dual du graphe sommets-arêtes de $\mathcal{M}$. On peut alors considérer que les courbes sont tracées « sur » le graphe sommets-arêtes (en fait, dans un voisinage tubulaire arbitrairement petit, plusieurs courbes pouvant se longer le long d'une même arête en étant disjointes) : la longueur d'une courbe, au sens défini précédemment, coïncide donc avec la longueur du chemin correspondant dans le graphe sommets-arêtes. Dans ce cadre, les processus d'optimisation donnent un moyen effectif de calculer les courbes (ou familles de courbes) optimales indiquées précédemment. La complexité des algorithmes est polynomiale en leur entrée (complexité de la surface et des courbes initiales) et en le rapport entre le maximum et le minimum des poids des arêtes de G.[1] La programmation de ces algorithmes ne présente pas de difficulté particulière : aucune structure de données complexe n'est requise. Les algorithmes d'optimisation sont très simples, la complétion d'une famille de courbes en un système de découpage prendrait plus de temps à programmer. Les seules opérations arithmétiques utilisées sont l'addition et la comparaison sur les réels (en fait dans l'anneau engendré par les poids des arêtes de G).

La complexité de ces problèmes n'était pas connue précédemment. Erickson et Har-Peled [68] ont étudié un problème voisin, celui de calculer le plus court schéma polygonal d'une surface polyédrale, et ont montré qu'il est NP-difficile, même dans le cas où les poids sont égaux à un. Notre travail montre en particulier qu'un problème plus simple, celui de calculer un plus court système fondamental de lacets homotope à un système donné, est polynomial (avec des poids unitaires).

[1] L'algorithme n'est donc polynomial, à proprement parler, que si le rapport entre le plus grand et le plus petit poids est majoré par une constante préalablement fixée.

Les applications de l'optimisation de courbes, schémas polygonaux ou décompositions en pantalons ont été données à la section 2.4, pages 53 à 59, nous ne revenons pas sur ce point.

À notre connaissance, aucun algorithme n'avait été développé, même pour optimiser une seule courbe dans une classe d'homotopie donnée sur une surface. Pour optimiser un chemin ou un lacet, il existe toutefois une méthode naïve : relever cette courbe dans le revêtement universel, calculer un plus court chemin entre les extrémités de ce relevé et projeter le résultat sur la surface. Cependant, cela ne garantit pas l'obtention d'un chemin simple (en projetant sur la surface, on peut créer des auto-intersections, voir les figures 2.5 et 2.6, page 46). Dans certains cas, il peut être souhaitable d'autoriser les auto-intersections ; mais, si l'on a en entrée un chemin simple, il est naturel de souhaiter un chemin simple en sortie. De plus, avec cette méthode, le nombre de sommets du revêtement universel à explorer peut être exponentiel, et donc aussi le coût de la méthode, même avec des poids unitaires (voir l'annexe à ce chapitre, page 116).

Ce chapitre fait suite aux publications [40, 41], écrites avec F. Lazarus. L'énoncé et la démonstration du théorème d'optimalité pour les plongements de cycles sont semblables à ceux de [41]. Le théorème d'optimalité pour les plongements de graphes est énoncé sous une forme bien plus générale que dans [40] (on optimise un plongement de graphe pouvant avoir plusieurs sommets, par opposition aux systèmes fondamentaux de lacets, et sur une surface qui peut avoir des bords) et démontré de façon nettement plus simple (le revêtement universel est moins utilisé, et les réductions sur les mots des croisements sont seulement parenthésées). Les sections 3.4 et 3.5 présentent aussi des différences notables avec ces articles.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Nous présentons d'abord plus en détail le cadre dans lequel nous nous plaçons et la notion de longueur considérée. Puis viennent la description des processus itératifs d'optimisation et les énoncés des deux théorèmes concernant l'optimalité de leurs résultats ; ces théorèmes sont ensuite démontrés. Après cela, nous décrivons comment compléter un plongement de graphe ou de cycles en un système de découpage. Enfin, nous expliquons comment tout cela peut être programmé.

3.1 Cadre de l'étude

3.1.1 Définition de la longueur

Cette section introduit des notions qui seront utilisées dans tout le chapitre. $\mathcal{M}$ désigne une surface compacte, connexe, orientable, éventuellement à bords, et G est un graphe non orienté plongé sur $\mathcal{M}$ tel que l'intérieur relatif de chaque arête est dans l'intérieur de $\mathcal{M}$. On suppose que G est *valué* : chaque arête e de G a un *poids* positif ou nul.

Nous allons considérer des familles de courbes (chemins ou cycles) tracées sur $\mathcal{M}$. Nous supposerons que ces familles sont *régulières* par rapport à G, au sens suivant :

– l'ensemble des points d'intersection entre les courbes et G est fini, et, en de tels points, exactement un morceau de courbe et une arête de G s'inter-

sectent, en se croisant ;
- si un point est une extrémité d'un chemin, il n'est dans l'intérieur relatif d'aucune courbe ;
- l'ensemble des points d'(auto-)intersection entre intérieurs relatifs de courbes est fini, et, en de tels points, exactement deux morceaux de courbes s'intersectent, en se croisant en ce point ;
- l'intérieur relatif de chaque courbe est dans l'intérieur de $\mathcal{M}$.

Une courbe est dite *régulière* si elle constitue à elle seule une famille régulière de courbes. Si une courbe régulière c coupe les arêtes $e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}$ de G, sa *longueur*, notée $|c|$, est définie comme étant la somme des poids de $e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}$, en comptant les multiplicités. La *longueur* d'une famille régulière de courbes s, notée $|s|$, est la somme des longueurs de ses courbes.

Il y a additivité des longueurs avec cette notion de longueur : si c_1 est un chemin de a_1 à a_2, c_2 un chemin de a_2 à a_3, de sorte que la concaténation de c_1 et c_2 est un chemin *régulier* c, et tel que a_2 n'est pas sur G, alors $|c| = |c_1| + |c_2|$. Nous ferons un usage fréquent de cette additivité des longueurs.

Pour fixer les idées, on pourra supposer que toutes les courbes sont affines par morceaux par rapport à une triangulation fixée de $\mathcal{M}$ — une telle surface étant nécessairement triangulable [57] : cela n'enlève rien à l'intérêt de ce chapitre et évite des complications de nature topologique.

3.1.2 Cas particulier d'une surface polyédrale

Pour illustrer l'introduction de cette notion de distance, il nous faut ici donner un cas particulier important, auquel nous nous restreindrons dans la section 3.5. Supposons que $\mathcal{M}$ soit une surface polyédrale, dont le graphe sommets-arêtes H est valué.[2]

Choisissons pour G le graphe dual de H plongé sur $\mathcal{M}$, défini de la façon suivante. (Ici, le graphe G peut avoir des sommets sur le bord de $\mathcal{M}$, la définition diffère donc légèrement de celle donnée au chapitre 1.) Il y a un sommet de G dans chaque face de H et une arête de G croisant chaque arête de H qui est dans l'intérieur de $\mathcal{M}$. De plus, pour chaque arête e de H sur le bord de $\mathcal{M}$, on place un sommet de G sur e, que l'on relie par une arête de G au sommet de G qui se trouve dans la face de H incidente à e. À chaque arête e de H correspond donc exactement une arête e^* de G, à laquelle on affecte le poids de e.

Tout chemin dans H a une longueur, au sens de la théorie des graphes (somme des poids des arêtes de ce chemin dans H) égale à la longueur, au sens précédent (somme des poids des arêtes de G croisées par le chemin). Tout plongement régulier de graphe ou de cycles sur $\mathcal{M}$ peut être rétracté en une famille de chemins sur H sans changer les classes d'homotopie des courbes, voir la figure 3.1 : chaque croisement d'une courbe avec une arête de G correspond à une arête d'un chemin dans H ; cette transformation préserve la longueur. Les chemins résultants peuvent ne pas être simples ou disjoints, parce qu'ils peuvent passer plusieurs fois par une même arête ou un même sommet ; nous dirons toutefois qu'ils sont simples

[2] Notons que nous ne supposons pas que chaque polygone est euclidien. En particulier, l'inégalité triangulaire n'a pas besoin d'être satisfaite.

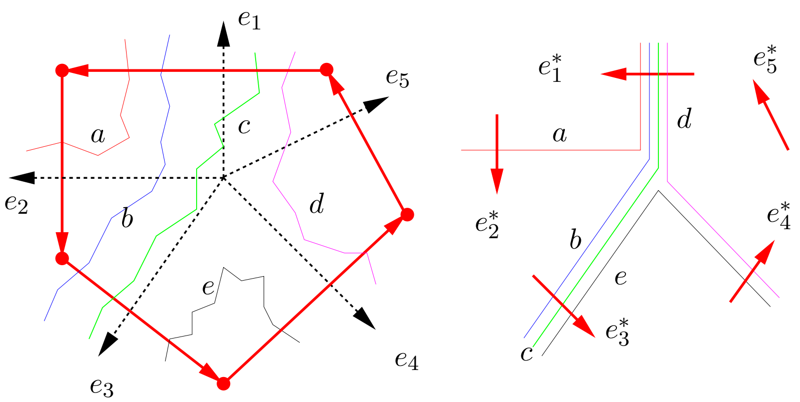


Fig. 3.1 – Une rétraction d'un plongement régulier de graphe ou de cycles (a, b, c, d, e) sur H, dans un voisinage d'un sommet de H dont les arêtes incidentes sont $e_1, \ldots, e_5$. Les arêtes de G correspondantes sont notées $e_1^*, \ldots, e_5^*$.

et disjoints en ce sens qu'il est toujours possible de les perturber (la perturbation étant arbitrairement petite) pour obtenir des chemins simples et disjoints ; ceci par analogie avec le cadre continu, où deux chemins peuvent se longer arbitrairement près l'un de l'autre en étant disjoints.

D'un point de vue algorithmique, nous nous intéressons donc à l'optimisation de courbes sur H, simples et deux à deux disjointes (au sens précédent). Les courbes sont des chemins (au sens de la théorie des graphes) sur H ; comme les courbes sont autorisées à se longer le long d'une même arête de H, nous supposerons aussi connu, pour chaque arête e de H, l'ordre des arêtes des chemins qui longent e, de gauche à droite. Le fait que les chemins sont simples et deux à deux disjoints se traduit par une condition sur les arêtes des chemins arrivant en chaque sommet de H ; nous reviendrons sur cet aspect à la section 3.5. Nous pourrions énoncer tous nos résultats dans ce cadre *combinatoire* ; cependant, pour les démonstrations, nous avons besoin de travailler avec des outils *topologiques* sur ces courbes. Nous choisissons donc d'énoncer et de démontrer nos résultats dans un cadre où les courbes sont « écartées » sur $\mathcal{M}$.

3.2 Théorèmes d'optimisation de systèmes de découpage

Un *plongement de graphe* sur $\mathcal{M}$ est (dans ce chapitre) une famille de chemins simples et deux à deux disjoints, sauf éventuellement en des extrémités communes. Un *plongement de cycles* sur $\mathcal{M}$ est une famille de cycles simples et deux à deux disjoints sur $\mathcal{M}$.

Nous allons définir la notion de système de découpage, qui est un plongement (de graphe ou de cycles) décomposant la surface en surfaces topologiquement élémentaires. Nous présenterons deux théorèmes concernant l'optimisation de systèmes de découpage, l'un pour les graphes, l'autre pour les cycles.

On se donne une surface $\mathcal{M}$ et un graphe G, et la longueur d'une courbe c sur $\mathcal{M}$ est calculée comme étant la somme des poids des arêtes de G croisées par c,

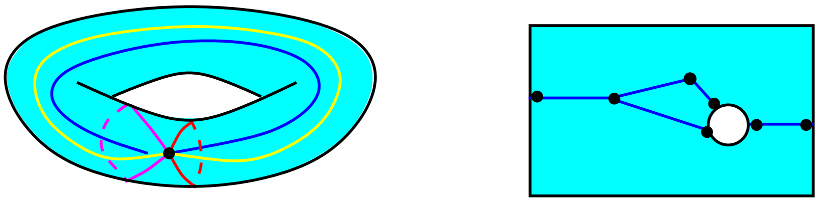


FIG. 3.2 – Deux exemples de systèmes de découpage par graphe : à gauche, sur un tore, un système de découpage par graphe à un seul sommet ; à droite, sur une sphère à deux trous, un système de découpage par graphe à sept sommets.

voir la section 3.1.

3.2.1 Systèmes de découpage par graphe

3.2.1.1 Résultat principal

Définition 3.1 *Un* système de découpage par graphe *de $\mathcal{M}$ est un plongement régulier de graphe $s = (s_1, \ldots, s_N)$ dans $\mathcal{M}$ tel que :*
- *aucun chemin de s n'est un lacet contractile ;*
- *pour tout $i \in [1, N]$, la surface obtenue par découpage de $\mathcal{M}$ le long de tous les chemins de s sauf s_i est une union disjointe de disques fermés. De plus, les extrémités de s_i sont sur le bord du disque contenant s_i.*

Voir la figure 3.2 pour deux exemples. L'ensemble des *sommets* de s est l'ensemble des extrémités de chemins dans s. Les disques fermés *définis* par s (ou $s \setminus s_i$) sont les disques fermés obtenus par découpage de $\mathcal{M}$ le long des chemins correspondants.

Soit $s = (s_1, \ldots, s_N)$ un système de découpage par graphe et soit $i \in [1, N]$. Nous définissons l'opération de raccourcissement, notée rac_i, de la façon suivante. Le système s est transformé en une famille de chemins $s' = (s'_1, \ldots, s'_N)$, telle que :
- si $k \neq i$, $s'_k = s_k$;
- s'_i a les mêmes extrémités que s_i, est un chemin ou lacet simple[3], et son intérieur relatif est dans la même face ouverte de $s \setminus s_i$ que l'intérieur relatif de s_i ;
- s' est un plongement régulier de graphe ;
- s'_i est aussi court que possible parmi les chemins satisfaisant les conditions précédentes.

Il y a une infinité de s' satisfaisant ces conditions ; l'ensemble des tels s' est noté $\mathrm{rac}_i(s)$. En d'autres termes, calculer un élément de $\mathrm{rac}_i(s)$ revient à raccourcir s_i dans la face de $s \setminus s_i$ dans laquelle il se trouve. On s'aperçoit facilement (voir le lemme 3.3 plus bas) que chaque élément $s' \in \mathrm{rac}_i(s)$ est un système de découpage par graphe homotope à s dans $\mathcal{M}$ (au sens où s_k et s'_k sont homotopes dans $\mathcal{M}$, pour tout k) et pas plus long que s.

[3] Ainsi, s'_i est un chemin simple, mis à part que ses extrémités peuvent être confondues si s_i est un chemin fermé.

Chaque opération de raccourcissement peut être vue comme une optimisation locale (on raccourcit un chemin en prenant garde à ne pas couper les autres). En ce sens, il s'agit d'un processus *glouton*. Le théorème suivant assure qu'en itérant les opérations de raccourcissement rac_i sur un système, on obtient, après stabilisation des longueurs des chemins, un optimum *global* pour *chacun* des chemins pris individuellement. Posons

$$\mathrm{rac} = \mathrm{rac}_N \circ \mathrm{rac}_{N-1} \circ \cdots \circ \mathrm{rac}_1,$$

c'est-à-dire que rac associe à un système de découpage l'ensemble des systèmes que l'on peut obtenir par application des N opérations de raccourcissement successives.

Théorème 3.2 *Soit $s^0 = (s_1^0, \ldots, s_N^0)$ un système de découpage par graphe ; pour tout $k \in \mathbf{N}$, soit $s^{k+1} \in \mathrm{rac}(s^k)$. Alors il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que s^m et s^{m+1} ont même longueur. De plus, dans ces conditions, pour tout $i \in [1, N]$:*

1. *s_i^m est un plus court chemin parmi tous les chemins (ou lacets) simples isotopes à s_i^0 dans $\mathcal{M}$ privé des sommets de s^0 qui ne sont pas des extrémités de s_i^0 ;*
2. *si les sommets du système s^0 sont tous sur le bord de $\mathcal{M}$, alors s_i^m est un plus court chemin parmi les chemins homotopes à s_i^0 dans $\mathcal{M}$.*

Nous dirons qu'un tel système s^m est *optimal*.

Le point 1 du théorème 3.2 ne paraît pas simple. Ci-dessous, nous essayons de montrer, par quelques exemples, que tous les éléments de cette conclusion sont nécessaires. Ensuite, nous déduirons quelques corollaires importants de ce théorème.

3.2.1.2 Commentaires

Commençons par un lemme simple.

Lemme 3.3 *Soit s un système de découpage par graphe et soit $i \in [1, N]$; soit $s' \in \mathrm{rac}_i(s)$. Alors s_i et s'_i sont des chemins ou des lacets isotopes dans la face ouverte de $s \setminus s_i$ contenant s_i, à laquelle on ajoute les extrémités de s_i.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}'$ le disque fermé défini par $s \setminus s_i$ contenant s_i. Supposons d'abord que les extrémités de s_i (et donc aussi de s'_i) soient distinctes sur $\mathcal{M}$. Alors s_i et s'_i, vus sur $\mathcal{M}'$, sont deux chemins simples dans $\mathcal{M}'$, qui intersectent le bord de $\mathcal{M}'$ précisément en leurs extrémités (communes). Donc s_i et s'_i sont isotopes dans l'intérieur de $\mathcal{M}'$ auquel on ajoute leurs extrémités, d'après le lemme 1.6, page 29.

Si s_i (et donc aussi s'_i) est un lacet, le même raisonnement s'applique : après découpage, le lacet s_i est transformé en un chemin simple (avec des extrémités distinctes), car sinon ce serait un lacet dans un disque, donc contractile, contredisant la définition d'un système de découpage par graphe. Il en est de même pour s'_i. $\square$

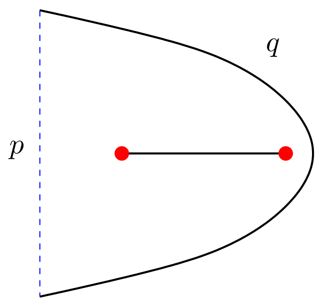


FIG. 3.3 – Le plus court chemin isotope à un chemin donné ne lui est pas nécessairement isotope dans $\mathcal{M}$ privé des sommets qui ne sont pas ses extrémités. Ici, les petits disques représentent les sommets du système de découpage qui ne sont pas les extrémités de q.

En particulier, s_i et s'_i sont isotopes dans $\mathcal{M}$ privé des sommets de s non extrémités de s_i. Nous verrons plus loin (section 3.4) que tout plongement régulier de graphe dans $\mathcal{M}$ peut se prolonger en un système de découpage par graphe dont les sommets sont les mêmes.

On peut se demander si s_i^m n'est pas, en fait, un plus court chemin parmi tous les chemins simples qui sont homotopes à s_i^0 dans $\mathcal{M}$ privé des sommets de s^0 non extrémités de s_i^0 ; il n'en est rien. En effet, rappelons-nous (figure 1.18, page 29) que deux chemins simples homotopes ne sont pas nécessairement isotopes. Si nous considérons une surface compacte contenant la figure 1.18, et que nous incluons q dans un système de découpage par graphe, que nous optimisons, le chemin correspondant à q sera nécessairement strictement plus long que p d'après le lemme 3.3 et parce que p et q ne sont pas isotopes.[4]

Peut-on dire que s_i^m est un plus court chemin parmi tous les chemins simples qui lui sont homotopes ou isotopes dans $\mathcal{M}$? La réponse, ici encore, est négative : la figure 3.3 montre un exemple où le plus court chemin p homotope ou isotope à q dans $\mathcal{M}$ ne lui est pas homotope dans $\mathcal{M}$ privé des sommets de q qui ne sont pas ses extrémités. On peut étendre q en un système de découpage par graphe, puis optimiser ce système : le chemin correspondant à q sera forcément plus long que p.

3.2.1.3 Deux corollaires

Deux plongements de graphe s et t sont *isotopes à sommets fixés* s'il existe une famille continue de plongements de graphe, dont les sommets sont les sommets de s, qui joint s à t. Un corollaire du théorème 3.2 est le suivant :

Corollaire 3.4 *s^m est un plus court système de découpage par graphe parmi tous les systèmes de découpage par graphe isotopes, à sommets fixés, à s^0.*

[4]Dans ces exemples, nous ne donnons pas le graphe G sous-jacent, espérant que l'intuition donnée par le cas de la longueur euclidienne suffira à convaincre le lecteur ; mais tout fonctionne effectivement dans le cadre que nous nous sommes fixés, avec un graphe G convenable.

DÉMONSTRATION. Le système s^m est isotope, à sommets fixés, à s^0 d'après le lemme 3.3. Soit $t = (t_1, \ldots, t_N)$ un système de découpage par graphe isotope, à sommets fixés, à s^0. L'existence d'une telle isotopie nous donne immédiatement une isotopie entre s_i^0 et t_i, à support dans $\mathcal{M}$ privé des sommets de s^0 qui ne sont pas des extrémités de s_i^0. D'après le théorème 3.2, s_i^m n'est pas plus long que t_i. □

Considérons l'ensemble E des systèmes de découpage par graphe qui appartiennent à une classe d'isotopie (à sommets fixés) donnée. On peut munir E d'une relation réflexive et transitive définie par $s \preceq t$ si et seulement si, pour tout $i \in [1, N]$, $|s_i| \leqslant |t_i|$. Le corollaire précédent assure l'existence d'un plus petit élément pour cette relation.

Dans le cas où le graphe a un seul sommet, nous avons :

Corollaire 3.5 *Soit s un système de découpage par graphe qui possède un seul sommet. Alors, pour tout i, s_i^m est un plus court lacet parmi tous les lacets simples homotopes à s_i^0.*

DÉMONSTRATION. Le lacet s_i^m est homotope à s_i^0. Soit t_i un plus court lacet parmi tous les lacets simples homotopes à s_i^0. Comme s_i^0 et t_i sont simples, homotopes et non contractiles, t_i est isotope à s_i^0 d'après le théorème d'Epstein (théorème 1.7, page 29). Mais, d'après le théorème 3.2, s_i^m est un plus court lacet parmi tous les lacets simples qui sont isotopes à s_i^0 dans $\mathcal{M}$, donc il ne peut pas être plus long que t_i. □

Nous appliquerons ce corollaire plus loin, au cas des systèmes fondamentaux de lacets.

Dans la conclusion du corollaire 3.5, on ne peut pas supprimer le mot « simple ». En effet, le plus court lacet homotope à un lacet donné n'est pas nécessairement simple, comme le montre la figure 2.6, page 46.

3.2.2 Systèmes de découpage par cycles

Définition 3.6 *Un* système de découpage par cycles *de $\mathcal{M}$ est un plongement régulier de cycles $s = (s_1, \ldots, s_N)$ sur $\mathcal{M}$ tel que :*
- *aucun des cycles n'est contractile ;*
- *la surface obtenue à partir de $\mathcal{M}$ par découpage le long des cycles de s est une union de cylindres et de pantalons (fermés), de même que la surface obtenue par découpage le long des cycles de $s \setminus s_i$, pour tout $i \in [1, N]$.*

Voir la figure 3.4 pour un exemple. Nous verrons que toute surface compacte, connexe, orientable, sauf la sphère et le disque, admet des systèmes de découpage par cycles. Les surfaces *définies* par s (ou $s \setminus s_i$) sont les composantes connexes de la surface obtenue par découpage de $\mathcal{M}$ le long des cycles correspondants ; ce sont des cylindres ou des pantalons.

Soit $s = (s_1, \ldots, s_N)$ un système de découpage par cycles et soit $i \in [1, N]$. Nous définissons une opération de raccourcissement, encore notée rac_i, de la façon

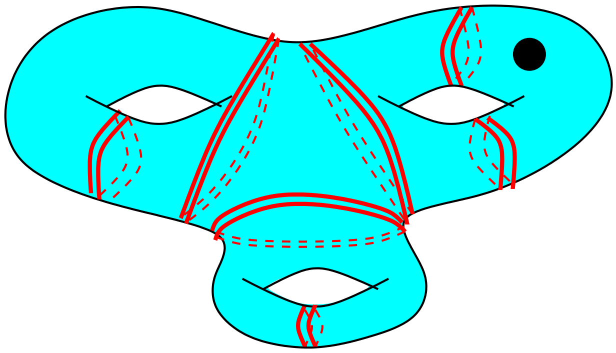


FIG. 3.4 – Un système de découpage par cycles sur une surface de genre trois à un bord.

suivante. Le système s est transformé en une famille de cycles $s' = (s'_1, \ldots, s'_N)$ telle que :
- si $k \neq i$, $s'_k = s_k$;
- s'_i est simple, et est homotope à s_i dans le cylindre ou le pantalon défini par $s \setminus s_i$ dans lequel s_i se trouve ;
- s' est un plongement régulier de cycles ;
- s'_i est aussi court que possible parmi les cycles satisfaisant les conditions précédentes.

À nouveau, $\text{rac}_i(s)$ désigne l'ensemble des tels s'. Une telle opération de raccourcissement transforme donc un système de découpage par cycles en un autre système de découpage par cycles qui lui est homotope (au sens où s_k et s'_k sont des cycles homotopes pour tout k) et qui n'est pas plus long. On pose encore

$$\text{rac} = \text{rac}_N \circ \text{rac}_{N-1} \circ \cdots \circ \text{rac}_1.$$

Nous avons alors le théorème d'optimalité suivant :

Théorème 3.7 *Soit $s = (s_1, \ldots, s_N)$ un système de découpage par cycles. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, soit $s^{k+1} \in \text{rac}(s^k)$. Pour un certain $m \in \mathbf{N}$, s^m et s^{m+1} ont la même longueur. Dans ces conditions, pour tout $i \in [1, N]$, s_i^m est un plus court cycle parmi tous les cycles (non nécessairement simples) homotopes à s_i^0.*

Nous dirons encore qu'un tel système est *optimal*. Considérons l'ensemble E des systèmes de découpage par cycles qui appartiennent à une classe d'homotopie donnée. On peut encore munir E d'une relation réflexive et transitive, définie par $s \preceq t$ si et seulement si, pour tout $i \in [1, N]$, $|s_i| \leqslant |t_i|$. Le théorème précédent assure l'existence d'un plus petit élément pour cette relation, et, de plus, tout plus petit élément est constitué de cycles qui sont, individuellement, des plus courts cycles dans leur classe d'homotopie.

3.2.3 Variantes

Avant de passer aux démonstrations de ces théorèmes, mentionnons simplement qu'il existe de légères variantes pour les procédés d'optimisation. Ces variantes relâchent la définition d'un système de découpage : la seconde condition de cette définition est remplacée par la condition plus faible que le découpage de $\mathcal{M}$ le long de s donne une union de surfaces élémentaires (disques, cylindres ou pantalons).

Pour la première variante, l'opération rac_i consiste à raccourcir s_i dans $\mathcal{M}$ découpée le long des courbes de $s \setminus s_i$ (qui n'est pas nécessairement un disque topologique dans le cas des systèmes de découpage par graphe), en maintenant la classe d'homotopie de s_i. C'est ce que nous avons fait dans [40] pour les systèmes fondamentaux de lacets. En fait, dans cet article, la complexité de l'algorithme est moins bonne que dans ce chapitre (chaque étape de raccourcissement pouvant nécessiter de chercher un plus court chemin simple homotope dans un cylindre) et la démonstration est plus longue. Dans le cas des cycles, cela doit compliquer aussi les choses, car le découpage de $\mathcal{M}$ le long de $s \setminus s_i$ peut créer des sphères à quatre bords ou des tores à un bord.

Une seconde variante consiste à définir, pour tout i, deux opérations rac_i et $\overline{\mathrm{rac}}_i$, consistant à raccourcir s_i dans la surface obtenue par découpage de $\mathcal{M}$ le long de s située à gauche (resp. à droite) de s_i. L'algorithme a la même complexité asymptotique que celui que nous présentons ici et est aussi assez naturel. Mais les démonstrations nous semblent légèrement plus simples dans le cadre que nous présentons.

3.3 Démonstration des théorèmes d'optimisation des systèmes de découpage

Cette section contient la démonstration des deux théorèmes 3.2 et 3.7 de la section précédente. Nous allons d'abord montrer le premier théorème dans un cas particulier où la démonstration est assez courte. Nous en déduirons le cas général par quelques considérations topologiques. La démonstration du second théorème utilise des arguments analogues à celle du premier, mais elle est nettement plus longue et plus complexe. La raison en est que toute la démonstration a lieu dans le revêtement universel et qu'il faut d'abord énoncer des propriétés simples sur les courbes sur des cylindres et des pantalons qui sont aussi courtes que possible dans leur classe d'homotopie.

Un ingrédient essentiel des démonstrations de ces théorèmes est la notion de mot des croisements, qui nous permet de coder la manière dont des courbes se coupent. Nous l'introduisons maintenant.

3.3.1 Mot des croisements

3.3.1.1 Préliminaire sur les mots

Nous introduisons d'abord quelques notions classiques sur les mots (voir par exemple [97, chapitre 1] ou [7, chapitre 0]). Soit X un ensemble non vide de symboles ; soit $\bar{X}$ l'ensemble des symboles $\{\bar{x},\ x \in X\}$. Une *lettre* est un élément de $X \cup \bar{X}$; on appelle *alphabet*, et on note A, l'ensemble de ces lettres. Un *mot* sur A est une suite finie d'éléments de A. Le mot vide est noté ε. La *longueur* d'un mot est le nombre de ses lettres. Étant donnés deux mots w_1 et w_2, leur *concaténation* est notée w_1w_2. Un mot v est un *facteur* d'un mot w s'il existe deux mots u_1 et u_2 tels que w s'écrit u_1vu_2.

Soit w un mot. Si w contient un facteur de la forme $a\bar{a}$ ou $\bar{a}a$, où a est un symbole, soit w' le mot obtenu en supprimant ce facteur de w ; nous dirons que w' se déduit de w par une *a-réduction élémentaire*. Une *réduction élémentaire* est une a-réduction élémentaire pour un certain a. Une *(a-)réduction* est une succession de zéro, une ou plusieurs (a-)réductions élémentaires. Un mot est dit *(a-)irréductible* si on ne peut lui appliquer aucune (a-)réduction élémentaire.

Lemme 3.8 *Soit w un mot ; il existe un seul mot irréductible (resp. a-irréductible) w' tel que w se réduit (resp. a-réduit) à w'.*

Démonstration. La démonstration est élémentaire, mais nous la mentionnons ici car les mêmes techniques seront employées plus loin. Nous démontrons le résultat dans le cas des réductions, les arguments étant les mêmes dans le cas des a-réductions.

La démonstration repose sur la propriété de *confluence* : si w, w_1 et w_2 sont des mots tels que w se réduit élémentairement à w_1 et w_2, alors il existe w_3 tel que w_1 et w_2 se réduisent tous les deux en w_3. Il s'agit d'une analyse de cas assez simple : les facteurs de w supprimés pour obtenir w_1 et w_2 sont soit confondus dans w, soit disjoints dans w, soit se chevauchent dans w. S'ils sont confondus, la propriété est évidemment vraie. Si ces facteurs sont disjoints dans w, alors elle est aussi vraie, car on peut prendre pour w_3 le mot w où ces deux facteurs sont supprimés. Sinon, les deux facteurs se chevauchent, et on a un facteur de w de la forme $a\bar{a}a$ ou $\bar{a}a\bar{a}$; alors (quitte à intervertir w_1 et w_2), la première réduction consiste à supprimer les deux premières lettres de ce facteur et la seconde consiste à supprimer les deux dernières. On a donc en réalité $w_1 = w_2$ et le résultat s'ensuit.

Le lemme se déduit de cette propriété par récurrence sur le nombre de lettres de w. S'il vaut 0 ou 1, le résultat est évident. Si w n'est pas irréductible, soient w_1 et w_2 deux mots quelconques tels que w se réduit élémentairement à w_1 et w_2 ; il suffit de montrer que w_1 et w_2 se réduisent chacun à un seul mot irréductible, qui est le même pour ces deux mots. On sait qu'il existe w_3 tel que w_1 et w_2 se réduisent à w_3. D'après l'hypothèse de récurrence, w_1, w_2 et w_3 se réduisent chacun à un seul mot irréductible, qui doit donc être le même pour w_1, w_2 et w_3 ; ce qui conclut la démonstration. □

Nous noterons $\mathrm{red}(w)$ (resp. $\mathrm{red}_a(w)$) l'unique mot irréductible (resp. a-irréductible) w' tel que w se réduit (resp. a-réduit) à w'. Nous dirons qu'un mot w est *parenthésé* si $\mathrm{red}(w) = \varepsilon$.[5]

Lemme 3.9 *Soient w_1 et w_2 deux mots. Alors w_1w_2 est parenthésé si et seulement si w_2w_1 l'est.*[6]

[5] Les mots parenthésés sont aussi appelés *mots de Dyck*, voir [12, p. 35].

[6] Ce lemme est évident pour le lecteur qui sait que les mots réduits constituent un groupe (le groupe libre), car dans un groupe $u.v$ est l'élément neutre si et seulement si $v.u$ l'est.

Démonstration. Par symétrie, il suffit de montrer une implication. On procède par récurrence sur la longueur de w_1w_2, le résultat étant trivial si la longueur vaut 0 ou 1. Soit w un facteur dans w_1w_2 de la forme $a\bar{a}$ (le cas $\bar{a}a$ étant analogue).

Si w est entièrement contenu dans w_1, soit w_1' le mot obtenu à partir de w_1 par cette réduction élémentaire ; par hypothèse de récurrence et comme $w_1'w_2$ est parenthésé, w_2w_1' l'est aussi ; donc w_2w_1 aussi. Le cas où w est entièrement inclus dans w_2 se traite de même.

Il reste donc le cas où $w_1 = w_1'a$ et $w_2 = \bar{a}w_2'$. Dans ce cas, comme w_1w_2 est parenthésé, $w_1'w_2'$ l'est aussi, donc par hypothèse de récurrence $w_2'w_1'$ aussi, donc $\bar{a}w_2'w_1'a = w_2w_1$ également. □

3.3.1.2 Mot des croisements

Soit C une famille de courbes (chemins, éventuellement fermés ou infinis, ou cycles) qui sont simples et deux à deux disjointes, sur une surface orientée. Soit A l'ensemble des lettres de la forme c ou $\bar{c}$, où $c \in C$. Soit p un chemin intersectant génériquement C (le nombre de points d'intersection est fini, et, en de tels points, p croise une courbe de C). Marchons le long de p et, à chaque fois que nous rencontrons un croisement avec une courbe c, inscrivons la lettre c ou $\bar{c}$, selon l'orientation du croisement. Le mot que nous obtenons s'appelle le *mot des croisements* de p avec C et est noté C/p.

Toutes les surfaces que nous considérerons seront supposées orientées. En particulier, on munit $\mathcal{M}$ d'une orientation, qui induit naturellement une orientation de son revêtement universel $(\widetilde{\mathcal{M}}, \pi)$.

Les lemmes suivants montrent que les mots parenthésés apparaissent naturellement dans les mots des croisements.

Lemme 3.10 *Soit C une famille de courbes simples et deux à deux disjointes sur une surface orientée, telle que chacune des courbes sépare la surface en deux composantes connexes. Soit p un chemin fermé intersectant génériquement C. Alors le mot des croisements C/p est parenthésé.*

Démonstration. Nous montrons le résultat par induction sur le nombre de croisements entre p et les courbes de C. Le résultat est trivial si p ne coupe aucune courbe de C. Supposons donc qu'il y a au moins un croisement entre p et une courbe $c \in C$.

Comme p est un chemin fermé, il doit croiser c au moins une autre fois avec l'orientation opposée. Considérons maintenant p comme un cycle γ (*i.e.*, oublions le point-base de p). Les deux croisements coupent le cycle γ en deux chemins p_1 et p_2 (figure 3.5). Pour $k = 1, 2$, il est possible d'étendre p_i en un chemin fermé p_i' de telle sorte que $C/p_i' = C/p_i$, en ajoutant un morceau de chemin qui longe une partie de c. D'après l'hypothèse de récurrence, C/p_1 et C/p_2 sont parenthésés. C/p vaut de plus, à permutation cyclique près,

$$c \ \ (C/p_1) \ \ \bar{c} \ \ (C/p_2) \quad \text{ou} \quad \bar{c} \ \ (C/p_1) \ \ c \ \ (C/p_2).$$

On en déduit, d'après le lemme 3.9, que C/p est parenthésé. □

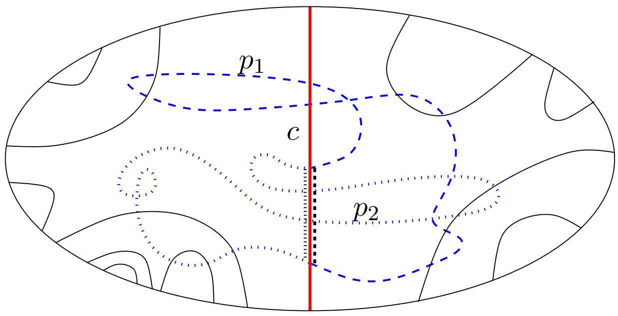


FIG. 3.5 – Une étape de la démonstration du lemme 3.10.

Le lemme suivant est un corollaire du lemme 3.10.

Lemme 3.11 *Soit C une famille de chemins sur $\mathcal{M}$ simples et deux à deux disjoints et qui intersectent $\partial\mathcal{M}$ exactement en leurs extrémités ; soit également p un chemin fermé contractile dans $\mathcal{M}$, intersectant génériquement C. Alors C/p est parenthésé.*

DÉMONSTRATION. Dans le revêtement universel $(\widetilde{\mathcal{M}}, \pi)$ de $\mathcal{M}$, considérons l'ensemble des relevés $\widetilde{C}$ des chemins dans C. Ces relevés sont simples et deux à deux disjoints, et chacun d'entre eux sépare $\widetilde{\mathcal{M}}$ en deux composantes connexes, en vertu du lemme 1.12, page 34.

Soit $\widetilde{p}$ un relevé de p ; comme p est contractile, $\widetilde{p}$ est fermé. D'après le lemme 3.10, $\widetilde{C}/\widetilde{p}$ est parenthésé. Or C/p est obtenu à partir de ce mot par projection, c'est-à-dire que chaque lettre de $\widetilde{C}/\widetilde{p}$, qui désigne un relevé d'une courbe dans C, est remplacée par la projection de cette courbe dans $\mathcal{M}$; donc C/p est parenthésé. $\square$

3.3.2 Démonstration du théorème 3.2

3.3.2.1 Démonstration du théorème 3.2 dans un cas particulier

Définition 3.12 *Un* système de découpage par chemins $s = (s_1, \ldots, s_N)$ *est un système de découpage par graphe tel que les $2N$ extrémités des chemins s_i sont deux à deux disjointes et sur le bord de $\mathcal{M}$.*

Nous allons démontrer le cas particulier suivant du théorème 3.2 :

Théorème 3.13 *Soit $s^0 = (s_1^0, \ldots, s_N^0)$ un système de découpage par chemins ; pour tout $k \in \mathbf{N}$, soit $s^{k+1} \in \mathrm{rac}(s^k)$. Alors il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que s^m et s^{m+1} ont même longueur. De plus, pour tout $i \in [1, N]$, s_i^m est un plus court chemin parmi les chemins homotopes à s_i^0 dans $\mathcal{M}$.*

Clairement, si s^0 est un système de découpage par chemins, alors s^k en est un pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Chaque surface considérée ici est supposée munie d'un plongement de graphe valué G, tel que la longueur d'un chemin régulier est calculée comme étant la somme des poids des arêtes de G croisées par le chemin. La proposition suivante nous servira à plusieurs reprises.

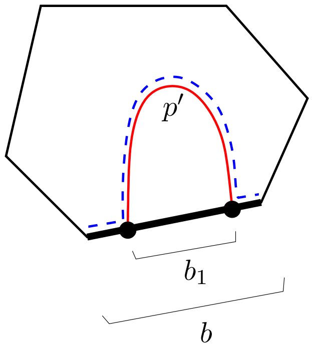


FIG. 3.6 – La démonstration de la proposition 3.14.

Proposition 3.14 *Soit D un disque fermé et soit b un chemin simple sur le bord de D. On suppose qu'il n'existe pas, dans D, de chemin simple ayant les mêmes extrémités que b qui soit plus court que b.*

Soit p un chemin régulier dans D, dont les extrémités sont sur b. Soit b_1 le sous-chemin de b ayant pour extrémités les extrémités de p. Alors $|b_1| \leqslant |p|$.

DÉMONSTRATION. Soit p' le chemin obtenu à partir de p en supprimant ses boucles ; p' est simple et pas plus long que p. Maintenant, si $|b_1| > |p|$ (figure 3.6), alors $|b_1| > |p'|$; mais alors, en remplaçant, dans b, le sous-chemin b_1 par p', on obtiendrait un chemin simple ayant les mêmes extrémités que b_1, et de longueur inférieure (le chemin p étant régulier, ses extrémités ne sont pas sur G), ce qui contredit l'hypothèse. $\square$

Soit, pour $i \in [1, N]$, un chemin c_i qui « longe » s_i^0, de la façon suivante :
- c_i est disjoint de tous les chemins de s^0 ;
- il existe deux chemins p_i et q_i sur $\partial\mathcal{M}$, de longueur nulle, dont les intérieurs relatifs ne rencontrent aucun chemin de s^0, et tels que s_i^0 est homotope à $p_i.c_i.q_i$.

En particulier, c_i a ses extrémités sur le bord de $\mathcal{M}$, et celles-ci ne rencontrent pas s^0.

Soit $i \in [1, N]$ fixé. Soit t_i un plus court chemin parmi tous les chemins homotopes à c_i. En particulier, t_i n'est pas nécessairement simple. Notons que si s^0 et t_i constituent une famille régulière de chemins alors, d'après le lemme 3.11, s^0/t_i est parenthésé (puisque $t_i.c_i^{-1}$ est contractile et que c_i ne coupe pas s^0). L'idée de la démonstration est de montrer que les opérations de raccourcissement « décroisent » s^0 et t_i.

Soit $s = (s_1, \ldots, s_N)$ un système de découpage par chemins à un certain stade du processus. Soit $j \in [1, N]$; soit $r \in \mathrm{rac}_j(s)$. Quitte à perturber légèrement t_i, on peut supposer que s (resp. r) et t_i constituent une famille régulière. Dans toute la suite de la démonstration, nous écrirons les mots des croisements de r ou de s avec t_i d'une façon un peu différente, en omettant les « s » et les « r » (par exemple, on écrira $1\ \overline{5}\ \overline{2}$ au lieu de $s_1\ \overline{s_5}\ \overline{s_2}$). Ceci permet de dire, par exemple, que $s/t_i = r/t_i$ si t_i ne coupe ni s_j, ni r_j. De façon similaire, on écrira red_j au lieu de red_{s_j} ou red_{r_j}.

Lemme 3.15 $\mathrm{red}_j(s/t_i) = \mathrm{red}_j(r/t_i)$.

DÉMONSTRATION. Considérons un sous-chemin maximal $\hat{t}_i$ de t_i qui ne coupe aucun chemin de $s \setminus s_j = r \setminus r_j$: $\hat{t}_i$ appartient à un disque fermé D défini par $s \setminus s_j$, donc $s/\hat{t}_i$ et $r/\hat{t}_i$ sont uniquement constitués de lettres de la forme j ou $\bar{\jmath}$.[7] Ces mots sont vides si s_j n'est pas dans D ; supposons maintenant que s_j appartient à D.

Les chemins s_j et r_j ont les mêmes extrémités, qui sont sur le bord de D, et leurs extrémités sont les seuls points sur le bord de D. De plus, $\hat{t}_i$ a ses extrémités sur le bord de D, et celles-ci sont différentes des extrémités de s_j et r_j. On en déduit que s_j sépare les extrémités de $\hat{t}_i$ si et seulement si r_j sépare les extrémités de $\hat{t}_i$ (théorème de Jordan). Si c'est le cas, $\mathrm{red}_j(s/\hat{t}_i)$ et $\mathrm{red}_j(r/\hat{t}_i)$ valent tous deux soit j, soit $\bar{\jmath}$; sinon, on a $\mathrm{red}_j(s/\hat{t}_i) = \varepsilon = \mathrm{red}_j(r/\hat{t}_i)$.

On peut donc écrire t_i comme concaténation de chemins $\hat{t}_{i,1}, \ldots, \hat{t}_{i,n}$ tels que chaque chemin $\hat{t}_{i,k}$ intersecte génériquement s et tel que, pour tout k, $\mathrm{red}_j(s/\hat{t}_{i,k}) = \mathrm{red}_j(r/\hat{t}_{i,k})$. D´où le résultat. □

La proposition suivante montre, grossièrement mais pas exactement, que l'application de rac_j à s a pour effet de procéder à toutes les j-réductions possibles dans le mot des croisements s/t_i. Cela est en fait vrai si l'on accepte de remplacer t_i par un chemin t'_i qui a les mêmes propriétés que t_i :

Proposition 3.16 *Il existe un chemin t'_i sur $\mathcal{M}$ tel que :*
- *t'_i a les mêmes propriétés que t_i (les longueurs et les classes d'homotopie de t_i et t'_i sont les mêmes ; t'_i et s (resp. r) constituent une famille régulière) ;*
- *$r/t'_i = \mathrm{red}_j(s/t_i)$.*

DÉMONSTRATION. Si r/t_i est j-irréductible, il n'y a rien à montrer d'après le lemme 3.15. On suppose donc qu'une j-réduction élémentaire est possible sur r/t_i. Soient $\hat{r}_j$ et $\hat{t}_i$ les sous-chemins de r_j et t_i associés à cette réduction. Ces deux chemins ne coupent pas r, donc sont dans un disque fermé défini par r. Il est évident que $|\hat{t}_i| \leqslant |\hat{r}_j|$ et il y a en fait égalité d'après la proposition 3.14. On peut donc « décroiser » les intersections, en remplaçant, dans t_i, la partie $\hat{t}_i$ par un chemin qui longe $\hat{r}_j$ (figure 3.7) ; ceci ne change pas la longueur du chemin, ni sa classe d'homotopie, et supprime deux croisements. On conclut par récurrence. □

Comme s^0/t_i est parenthésé, la proposition précédente montre aussi qu'à un certain stade du processus, s/t_i est le mot vide (quitte à remplacer t_i par un chemin ayant les mêmes propriétés), car la longueur de s/t_i décroît strictement à chaque application de rac. La proposition qui suit a pour but d'étudier ce qui se passe une fois que s et t_i sont disjoints.

Proposition 3.17 *Supposons que s et t_i soient disjoints et que $j = i$. Alors* $|r_j| = |t_i|$.

[7] Dans cette démonstration, $\hat{t}_i$ ne coupe pas s génériquement car des extrémités de $\hat{t}_i$ peuvent être sur s ; on peut néanmoins définir naturellement le mot des croisements, avec la convention que les intersections entre s et les extrémités de $\hat{t}_i$ ne sont pas prises en compte.

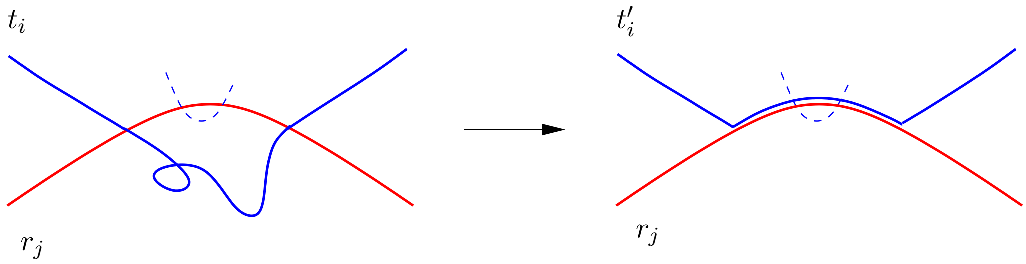


FIG. 3.7 – L'opération de décroisement entre les courbes r_j et t_i dans la démonstration de la proposition 3.16. Le chemin t_i n'est pas nécessairement simple et r_j peut croiser d'autres portions de t_i.

DÉMONSTRATION. Le chemin t_i est dans un disque topologique défini par s. Quitte à supprimer les boucles de t_i, qui sont contractiles, on peut supposer t_i simple. Ainsi, le chemin $p_i.t_i.q_i$ est lui aussi simple, et de même longueur que t_i ; il a les mêmes extrémités que s_j et se trouve dans un disque fermé défini par s. Perturbons légèrement $p_i.t_i.q_i$ en un chemin simple u_i qui rencontre $\partial\mathcal{M}$ exactement en ses extrémités et qui a même longueur que t_i. Alors, par définition de $r \in \mathrm{rac}_j(s)$, nous avons $|r_j| \leqslant |u_i| = |t_i|$. Comme t_i est un plus court chemin dans sa classe d'homotopie et que p_i et q_i ont une longueur nulle, il y a en fait égalité. $\square$

Concluons la démonstration du théorème 3.13, cas particulier du théorème 3.2.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.13. Soient s et $s' \in \mathrm{rac}_j(s)$ deux systèmes de découpage considérés au cours de l'optimisation ; par abus de notation, nous noterons $s' = \mathrm{rac}_j(s)$ (ce qui sous-entend qu'au cours du procédé d'optimisation, c'est s' qui est choisi comme élément de $\mathrm{rac}_j(s)$).

Soit $i \in [1, N]$ et soit t_i^0 un plus court chemin parmi tous les chemins homotopes à c_i. Supposons que t_i^0 et s^0 constituent une famille régulière de chemins. D'après le lemme 3.11, on sait que s^0/t_i^0 est parenthésé. D'après la proposition 3.16, on peut construire une suite $(t_i^k)_{k\in\mathbf{N}}$ de plus courts chemins homotopes à t_i^0 tels que la longueur du mot des croisements s^k/t_i^k décroît strictement jusqu'à atteindre le mot vide ε à une certaine étape p. En appliquant encore $i-1$ fois la proposition 3.16, nous obtenons qu'il existe t_i, ayant les mêmes propriétés que t_i^0, qui ne coupe pas $\mathrm{rac}_{i-1} \circ \cdots \circ \mathrm{rac}_1(s^p)$. D'après la proposition 3.17, $|s_i^{p+1}|$ et $|t_i|$ ont la même longueur.

Ce qui précède montre déjà que, pour tout i, la suite $(|s_i^k|)_{k\in\mathbf{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain rang $p+1$, et que, quand c'est le cas, s_i^{p+1} est un plus court chemin homotope. Il reste à démontrer que cette suite est stationnaire dès que deux termes consécutifs sont égaux, c'est-à-dire dès que $|s^m| = |s^{m+1}|$. (Ce fait fournit un critère bien commode pour savoir quand on peut arrêter le processus d'optimisation.) Supposons donc que deux systèmes de découpage par chemins s et $s' = \mathrm{rac}(s)$ aient la même longueur, et soit $i \in [1, N]$; il suffit de montrer que s_i a la même longueur que t_i (un plus court chemin homotope à c_i).

Le mot s/t_i est parenthésé ; supposons qu'une j-réduction élémentaire soit possible sur ce mot, et soient $\hat{s}_j$ et $\hat{t}_i$ les deux sous-chemins associés à cette réduction. Nous allons montrer que les deux chemins ont la même longueur. On en déduira que l'on peut, comme dans la proposition 3.16, modifier t_i sans changer sa longueur ni sa classe d'homotopie, pour procéder à cette j-réduction. Ainsi, par récurrence, on pourra supposer (quitte à changer t_i) que $s/t_i = \varepsilon$.

Supposons $j \neq 1$; seul $(\mathrm{rac}_1(s))_1$ apparaît dans le mot $(\mathrm{rac}_1(s))/\hat{t}_i$. D'après le lemme 3.11, ce mot est parenthésé et, d'après la proposition 3.14, on peut procéder itérativement aux réductions, en remplaçant $\hat{t}_i$ par un chemin $\hat{t}'_i$ qui a la même longueur et la même classe d'homotopie que $\hat{t}_i$, et qui ne coupe pas $\mathrm{rac}_1(s)$. En itérant le procédé, on obtient l'existence d'un chemin $\hat{t}''_i$, de même longueur et même classe d'homotopie que $\hat{t}_i$, qui ne coupe aucun chemin de $s'' := \mathrm{rac}_{j-1} \circ \cdots \circ \mathrm{rac}_1(s)$. De plus, les extrémités de $\hat{t}''_i$ sont sur s''_j ; comme les éléments de $\mathrm{rac}_j(s'')$ ont la même longueur que s'', alors $\hat{t}''_i$ ne peut pas être plus court que $\hat{s}_j$. Donc $|\hat{s}_j| = |\hat{t}''_i| = |\hat{t}_i|$.

On peut donc supposer, quitte à changer t_i, que $s/t_i = \varepsilon$. En appliquant $i-1$ fois la proposition 3.16, on peut encore supposer, quitte à changer t_i, que $(\mathrm{rac}_{i-1} \circ \cdots \circ \mathrm{rac}_1(s))\,/t_i = \varepsilon$. La proposition 3.17 montre alors que $|(\mathrm{rac}(s))_i| = |t_i|$; comme $|(\mathrm{rac}(s))_i| = |s_i|$, on en déduit que $|s_i| = |t_i|$, ce qu'il fallait démontrer. □

3.3.2.2 Démonstration du théorème 3.2 dans le cas général

La démonstration du théorème 3.2 consiste à se ramener dans le cadre d'application du théorème 3.13. L'idée est de retirer des petits disques à $\mathcal{M}$ autour des sommets du système de découpage par graphe s^0 pour obtenir une surface à bords $\hat{\mathcal{M}}$, de définir à partir de s^0 un système de découpage par chemins $\hat{s}^0$ sur $\hat{\mathcal{M}}$ et de montrer que les optimisations de s^0 et $\hat{s}^0$ se font de la même façon.

Nous avons vu que l'application rac_i n'est pas définie de façon unique : il y a plusieurs s'_i satisfaisant les conditions requises pour que $s' \in \mathrm{rac}_i(s)$. En particulier, intuitivement, le cheminement exact de s'_i n'importe pas : si nous déformons un sous-chemin de s'_i à l'intérieur d'une face de G, en gardant les chemins simples et disjoints, il doit paraître clair au lecteur que le déroulement de l'optimisation va être inchangé. Nous allons maintenant formaliser ce point.

Soit s un système de découpage par graphe ; pour tout sommet v de s, soit D_v un disque fermé contenant v dans son intérieur[8] et disjoint de G. On suppose D_v choisi de telle sorte que, pour tout j, s_j coupe le bord de D_v un nombre minimal de fois (autant de fois que s_j a d'extrémités en v). On suppose aussi les D_v disjoints. L'existence de tels disques est immédiate si l'on suppose que toutes les courbes considérées sont affines par morceaux par rapport à une triangulation fixée de $\mathcal{M}$ et découle, dans le cas général, du lemme 1.3, page 19.

Lemme 3.18 *Soit $i \in [1, N]$ et soit $s' \in \mathrm{rac}_i(s)$. Il existe $s'' \in \mathrm{rac}_i(s)$ tel que :*
- *s_i et s''_i coïncident dans les disques D_v ;*

[8]Ici, les notions d'adhérence, d'intérieur et de bord, sont prises relativement à l'espace ambiant $\mathcal{M}$. En particulier, si v est sur le bord de $\mathcal{M}$, l'intérieur de D_v contient une portion de bord de $\mathcal{M}$. Dans ce cas, on prendra D_v de sorte que son bord soit homéomorphe à un segment fermé.

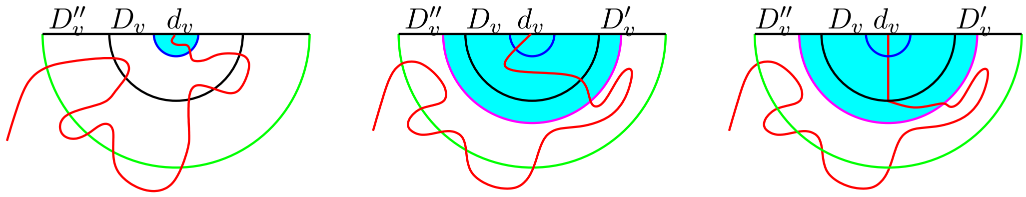


FIG. 3.8 – La création de l'homéomorphisme dans la démonstration du lemme 3.18. Le chemin représenté est une portion de s'_i.

– *le déroulement du processus d'optimisation est le même, que l'on parte de s' ou s''. Plus précisément, soit f la composition, dans un ordre quelconque, d'un nombre fini d'opérations* rac_j *; alors pour tout élément dans $f(s')$, il existe un élément dans $f(s'')$ dont les longueurs des courbes sont les mêmes.*

DÉMONSTRATION. On commence par construire des disques d_v, D'_v et D''_v autour de chaque sommet v, de telle sorte que :

$$d_v \sqsubset D_v \sqsubset D'_v \sqsubset D''_v,$$

la notation $A \sqsubset B$ signifiant que l'adhérence de A est incluse dans l'intérieur de B. On peut supposer que les disques d_v, D'_v et D''_v sont disjoints de G et que les disques D''_v sont deux à deux disjoints. On peut aussi supposer que s'_i rencontre le bord de d_v un nombre minimal de fois.

Soit v une extrémité de s_i. Supposons d'abord que v est de degré 1 (en tant que sommet de s), ce qui implique qu'il est sur le bord de $\mathcal{M}$ par définition d'un système de découpage par graphe. Nous allons montrer qu'il existe un homéomorphisme h_1 de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$, fixe hors de D''_v et sur v, tel que s_i et $h_1(s'_i)$ sont confondus dans D_v. On construit un premier homéomorphisme qui envoie d_v dans D'_v, en fixant v et $\mathcal{M} \setminus D''_v$ (figure 3.8, à gauche et au milieu). En composant par un second homéomorphisme, qui fixe v et $\mathcal{M} \setminus D'_v$ (figure 3.8, à droite), on peut s'arranger pour que l'image de s'_i dans D_v soit n'importe quel chemin simple ayant v pour extrémité (théorème de Jordan–Schönflies), donc en particulier la portion de s_i qui est à l'intérieur de D_v.

Si v est de degré plus grand que 1, alors les chemins autres que s_i décomposent le disque D''_v en secteurs (voir la figure 3.9). Si s_i est un chemin fermé, de point-base v, alors les extrémités de s_i sont dans deux secteurs différents de D''_v : sinon, s_i serait le bord d'une face de s, qui est un disque, et s_i serait contractile, contredisant la définition d'un système de découpage par graphe. On peut appliquer le même raisonnement que précédemment dans chaque secteur de D''_v qui contient une extrémité de s_i.

En utilisant la même technique, on peut, pour chaque secteur d'un disque D''_w qui ne contient aucune extrémité de s_i, créer un homéomorphisme fixe hors de ce secteur tel que l'image de s'_i par cet homéomorphisme n'entre pas dans D_w. Finalement, nous avons construit un homéomorphisme h, fixe en les sommets de s, en les chemins de $s \setminus s_i$ et hors des disques D''_v, tel que $h(s'_i)$ et s_i coïncident dans tous les disques D_v.

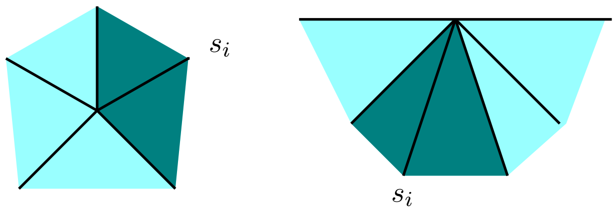


FIG. 3.9 – Les secteurs de D''_v définis par les chemins de $s \backslash s_i$, dans la démonstration du lemme 3.18. À gauche, le cas où v est à l'intérieur de $\mathcal{M}$; à droite, le cas où v est sur le bord de $\mathcal{M}$.

Posons $s'' = h(s')$; il est clair que $s'' \in \mathrm{rac}_i(s)$. De plus, pour tout j et pour tous systèmes t et t', nous avons $t' \in \mathrm{rac}_j(t)$ si et seulement si $h(t') \in \mathrm{rac}_j(h(t))$. Cette dernière assertion montre que le déroulement ultérieur de l'optimisation est le même, que l'on poursuive avec s' ou s'' : les longueurs des systèmes considérés au cours de l'optimisation vont être les mêmes. $\square$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2. Soit V l'ensemble des sommets de s. Soient s et $s' \in \mathrm{rac}_i(s)$ deux systèmes de découpage par graphe considérés au cours de l'optimisation. Déjà, d'après le lemme 3.3, nous savons que s_i et s'_i sont isotopes dans $\mathcal{M}$ privé des éléments de V qui ne sont pas extrémités de s_i. En particulier, s_i et s'_i sont homotopes dans $\mathcal{M}$.

On construit des disques D_v, comme indiqué plus haut, tels que les chemins s^0 coupent le bord des disques D_v un nombre minimal de fois. D'après le lemme 3.18, on peut supposer que, à chaque étape de raccourcissement, la restriction des chemins du système à l'intérieur des disques D_v ne change pas.

Soit U la réunion des intérieurs des disques D_v ; l'espace $\hat{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \setminus U$ est une surface à bord. Pour tout système de découpage par graphe s considéré au cours du processus d'optimisation, on constate que l'intersection de s avec $\hat{\mathcal{M}}$ est un système de découpage par chemins, que l'on note $\hat{s}$. Si s et $s' \in \mathrm{rac}_i(s)$ sont deux systèmes de découpage par graphe considérés, alors $\hat{s}'$ appartient à $\mathrm{rac}_i(\hat{s})$. En effet, à tout chemin dans $\hat{\mathcal{M}}$ simple, disjoint de $\hat{s}_j$ pour $j \neq i$, ayant les mêmes extrémités que $\hat{s}_i$, correspond un chemin (ou lacet) simple de $\mathcal{M}$, disjoint de s_j pour $j \neq i$, ayant les mêmes extrémités que s_i, son intérieur relatif étant dans la même face de $s \setminus s_i$ que l'intérieur relatif de s_i ; de plus, ces chemins ont même longueur.

La suite $(\hat{s}^k)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifie donc $\hat{s}^{k+1} \in \mathrm{rac}(\hat{s}^k)$. Nous pouvons alors appliquer le théorème 3.13 : il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $|\hat{s}^{m+1}| = |\hat{s}^m|$, et, pour tout i, $\hat{s}_i^m$ est un plus court chemin parmi les chemins qui lui sont homotopes dans $\hat{\mathcal{M}}$.

Supposons d'abord que tous les sommets de s^0 sont sur le bord de $\mathcal{M}$; soit $i \in [1, N]$. Soit t_i un chemin homotope à s_i^0 dans $\mathcal{M}$, aussi court que possible (mais pas forcément simple). Le chemin t_i est donc homotope, dans $\mathcal{M}$, à un chemin t'_i, de même longueur que t_i, dont la restriction à chacun des disques D_v est la même que s_i^0. En particulier, t'_i n'entre pas dans le disque D_v, si v n'est pas extrémité de s_i^0. On obtient un chemin $\hat{t}'_i$, inclus dans $\hat{\mathcal{M}}$, de même longueur que t_i, homotope dans $\mathcal{M}$ à s_i^0. Comme tous les sommets de s_i^0 sont sur le bord de $\mathcal{M}$, cela implique que $\hat{t}'_i$ est homotope *dans* $\hat{\mathcal{M}}$ à $\hat{s}_i^0$, et donc que $\hat{s}_i^m$ n'est pas plus long que t_i. Ceci démontre le point 2 du théorème 3.2. Nous démontrons maintenant le premier point.

Soit $i \in [1, N]$. Appelons v_0 et v_1 les extrémités de s_i^0 ; soit $V' = V \setminus \{v_0, v_1\}$. Soit t_i un plus court chemin (ou lacet) simple isotope à s_i^0 dans $\mathcal{M} \setminus V'$. Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que $\hat{s}_i^m$ et t_i ont même longueur.

Soit $h : [0,1] \times [0,1] \to \mathcal{M} \setminus V'$ une isotopie entre s_i^0 et t_i : pour tout $t \in [0,1]$, $h(t,.)|_{[0,1[}$ est injective, $h(t,0) = v_0$ et $h(t,1) = v_1$. Pour $k = 0,1$, $h^{-1}(D_{v_k})$ est un voisinage du compact $[0,1] \times \{k\}$; il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que :

$$h([0,1] \times [0,\varepsilon]) \subset D_{v_0} \quad \text{et} \quad h([0,1] \times [1-\varepsilon, 1]) \subset D_{v_1}.$$

Soit h' la restriction de h à $[0,1] \times [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Soit $r : \mathcal{M} \setminus V \to \mathcal{M} \setminus U$ une application continue qui vaut l'identité sur $\mathcal{M} \setminus U$ et qui envoie, pour tout $v \in V$, $D_v \setminus \{v\}$ sur le bord de D_v. Comme h est une isotopie dans $\mathcal{M} \setminus V'$ et que $h(.,k) = v_k$ pour $k = 0,1$, l'application $h'' := r \circ h'$ est bien définie, continue et est à support dans $\hat{\mathcal{M}}$. De plus :

- $h''(.,\varepsilon)$ est sur le bord de D_{v_0}, et $h''(.,1-\varepsilon)$ est sur le bord de D_{v_1} ;
- $h''(0,.)$ est la concaténation d'un chemin sur le bord de D_{v_0}, de $\hat{s}_i^0$ et d'un chemin sur le bord de D_{v_1} ;
- $h''(1,.)$ est la concaténation d'un chemin sur le bord de D_{v_0}, d'un chemin $\hat{t}_i$ qui a même longueur que t_i et d'un chemin sur le bord de D_{v_1}.

On en déduit que $\hat{s}_i^0$ est homotope, dans $\hat{\mathcal{M}}$, à un chemin qui a la même longueur que t_i ; donc $|s_i^m| = |t_i|$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

3.3.3 Démonstration du théorème 3.7

Nous démontrons maintenant le théorème 3.7. Les idées sont similaires à la démonstration du théorème 3.13, mais celle-ci est plus sophistiquée. Cela vient du fait que nous devons raccourcir des cycles sur un cylindre ou un pantalon dans une classe d'homotopie donnée, contrairement à la situation des plongements de graphes. Dans cette section, nous supposerons toujours que les familles de courbes considérées sont régulières, et nous omettrons cette précision.

3.3.3.1 Classes de mots des croisements

Soit C une famille de courbes (chemins ou cycles) sur $\mathcal{M}$ qui sont simples et deux à deux disjointes. Nous voulons définir l'analogue du mot des croisements entre un relevé donné d'un cycle de $\mathcal{M}$ et les relevés des courbes dans C.

Nous introduisons d'abord la notion de *relevé géométrique*. D'après le chapitre 1, un relevé d'un cycle $\gamma : \mathbf{R} \to \mathcal{M}$ (tel que $\gamma(1+.) = \gamma(.)$) est un chemin infini $\widetilde{\gamma} : \mathbf{R} \to \widetilde{\mathcal{M}}$ tel que $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$. Définissons la relation d'équivalence $\sim$ sur les relevés de γ par : $\widetilde{\gamma} \sim \widetilde{\gamma}'$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\widetilde{\gamma}(.) = \widetilde{\gamma}'(k+.)$. D'un point de vue géométrique, deux relevés qui sont dans la même classe d'équivalence sont les mêmes (en particulier, leurs images sur $\mathcal{M}$ sont confondues). Un *relevé géométrique* est une classe d'équivalence de cette relation. Clairement, pour un cycle contractile γ, les notions de relevé et de relevé géométrique coïncident ; par définition, elles coïncident aussi pour les chemins. Cette notion nous permet de définir le mot des croisements entre un chemin dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ et les relevés *géométriques* des courbes de C : en effet, comme C contient des courbes simples et deux à deux disjointes, les relevés géométriques de C correspondent exactement aux composantes connexes de $\pi^{-1}(\bar{C})$, où $\bar{C} \subset \mathcal{M}$ désigne l'union des images des courbes de C.

Soit γ un cycle non contractile dans $\mathcal{M}$ qui intersecte génériquement les courbes de C, et soit $\widetilde{\gamma}$ un relevé de γ. Nous voulons éviter de définir le mot des croisements de $\widetilde{\gamma}$ avec un ensemble de relevés géométriques, parce que ce mot est potentiellement infini. Au lieu de cela, nous nous restreignons à des portions de $\widetilde{\gamma}$, appelées *périodes relevées*. Une *période relevée* de $\widetilde{\gamma}$ est un chemin qui est de la forme $\widetilde{\gamma}(a + .)|_{[0,1]}$ pour un certain $a \in \mathbf{R}$.

Soit $\widetilde{C}$ l'ensemble des relevés géométriques de C. Convenons que si c est une courbe dans C, alors les relevés géométriques de c sont notés c^α, $\alpha \in I_c$. (Il est clair que les relevés géométriques d'une courbe sont énumérables, et nous pouvons donc choisir $I_c \subseteq \mathbf{N}$, mais l'ensemble d'indexation I_c n'a aucune importance.) Nous considérons les mots sur l'alphabet constitué des lettres c^α et $\bar{c}^\alpha$, où $c^\alpha \in \widetilde{C}$. La *classe de mots des croisements* de $\widetilde{\gamma}$ avec $\widetilde{C}$, notée $[\widetilde{C}/\widetilde{\gamma}]$, est l'ensemble des mots des croisements $\widetilde{C}/\widetilde{p}$, sur toutes les périodes relevées $\widetilde{p}$ de $\widetilde{\gamma}$.[9] Notre première tâche va être de montrer que la classe de mots des croisements $[\widetilde{C}/\widetilde{\gamma}]$ est entièrement déterminée une fois que l'on connaît l'un de ses éléments.

Notons que $\widetilde{\gamma}$ induit un automorphisme $\tau_{\widetilde{\gamma}}$ sur $\widetilde{\mathcal{M}}$, de la façon suivante. Soit $v \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Soit $\widetilde{p}$ une période relevée de $\widetilde{\gamma}$; considérons un chemin β^0 joignant $\widetilde{p}(0)$ à v, et appelons β^1 le relevé de $\pi(\beta^0)$ partant de $\widetilde{p}(1)$. β^1 arrive en un point v' qui satisfait $\pi(v) = \pi(v')$; intuitivement, $\widetilde{\gamma}$ translate v en v'. On vérifie que v' ne dépend ni du choix de β^0 ni de $\widetilde{p}$; on définit donc $\tau_{\widetilde{\gamma}}(v) := v'$. En particulier, $\tau_{\widetilde{\gamma}}$ envoie un relevé géométrique d'une courbe $c \in C$ en un autre relevé géométrique de c.

Définissons une permutation $\phi_{\widetilde{\gamma}}$ sur l'ensemble des mots par les règles, si w est un mot et $c^\alpha \in \widetilde{C}$: $\phi_{\widetilde{\gamma}}(c^\alpha w) = w\ \tau_{\widetilde{\gamma}}(c^\alpha)$, $\phi_{\widetilde{\gamma}}(\bar{c}^\alpha w) = w\ \overline{\tau_{\widetilde{\gamma}}(c^\alpha)}$ et $\phi_{\widetilde{\gamma}}(\varepsilon) = \varepsilon$.

Proposition 3.19 *Pour tout mot w dans $[\widetilde{C}/\widetilde{\gamma}]$, on a : $[\widetilde{C}/\widetilde{\gamma}] = \{\phi^n_{\widetilde{\gamma}}(w), n \in \mathbf{Z}\}$.*

Démonstration. D'abord, soient $a^1 < a^2$ deux réels tels qu'exactement un croisement se produit entre les courbes de $\widetilde{C}$ et $\widetilde{\gamma}|_{[a^1,a^2]}$. Pour $k = 1, 2$, soit $w^k = \widetilde{C}/\widetilde{\gamma}|_{[a^k,a^k+1]}$. Nous avons $w^2 = \phi_{\widetilde{\gamma}}(w^1)$; en effet,

$$\begin{aligned}\tau_{\widetilde{\gamma}}(c^\alpha \cap \widetilde{\gamma}|_{[a^1,a^2]}) &= \tau_{\widetilde{\gamma}}(c^\alpha) \cap \tau_{\widetilde{\gamma}}(\widetilde{\gamma}|_{[a^1,a^2]}) \\ &= \tau_{\widetilde{\gamma}}(c^\alpha) \cap \widetilde{\gamma}|_{[a^1+1,a^2+1]}.\end{aligned}$$

Il est alors facile de conclure. □

Si w est un mot, nous définissons $[w]_{\widetilde{\gamma}}$ comme étant l'ensemble $\{\phi^n_{\widetilde{\gamma}}(w), n \in \mathbf{Z}\}$. Les ensembles de mots ayant cette forme sont appelés les $\widetilde{\gamma}$-*classes de mots* ; en

[9] En fait, nous ne considérons que les périodes relevées dont les extrémités sont disjointes des relevés de $\widetilde{C}$; ceci pour éviter une définition laborieuse des croisements quand une intersection intervient avec une extrémité de $\widetilde{p}$.

particulier, la classe de mots des croisements $[\widetilde{C}/\widetilde{\gamma}]$ est une $\widetilde{\gamma}$-classe de mots. Notons que $\phi_{\widetilde{\gamma}}$ n'affecte pas la longueur d'un mot, donc la *longueur* d'une $\widetilde{\gamma}$-classe de mots est bien définie. Soit W une $\widetilde{\gamma}$-classe de mots. S'il existe $w \in W$ contenant un facteur $c^\alpha\bar{c}^\alpha$ ou $\bar{c}^\alpha c^\alpha$, où $c^\alpha \in \widetilde{C}$, soit w' le mot résultant de la suppression de ce facteur dans w ; nous dirons que W (qui vaut aussi $[w]_{\widetilde{\gamma}}$) se *c-réduit élémentairement* à $[w']_{\widetilde{\gamma}}$. Nous définissons les *réductions élémentaires*, les *(c)-réductions*, et les *(c)-classes de mots irréductibles* de façon naturelle.

Lemme et Définition 3.20 *Soit c une courbe de C. Toute $\widetilde{\gamma}$-classe de mots W se c-réduit (resp. réduit) à exactement une $\widetilde{\gamma}$-classe de mots c-irréductible (resp. irréductible). Nous définissons* $\mathrm{red}_c(W)$ *(resp.* $\mathrm{red}(W)$*) comme étant cette $\widetilde{\gamma}$-classe de mots.*

Démonstration. Nous démontrons le résultat pour les réductions, le même argument fonctionnant pour les c-réductions. Soit w un mot ; une *simplification* sur w consiste soit en une réduction élémentaire sur w (suppression de $c^\alpha\bar{c}^\alpha$ ou $\bar{c}^\alpha c^\alpha$), soit en la suppression de la première et de la dernière lettre de w, si la première est de la forme c^α (resp. $\bar{c}^\alpha$) et la dernière de la forme $\overline{\tau_{\widetilde{\gamma}}(c^\alpha)}$ (resp. $\tau_{\widetilde{\gamma}}(c^\alpha)$). On montre facilement que W se réduit élémentairement à W' si et seulement si, pour *tout* $w \in W$, il existe $w' \in W'$ tel que w se simplifie en w'.

Nous dirons que w et w' sont *équivalents* si $[w]_{\widetilde{\gamma}} = [w']_{\widetilde{\gamma}}$. Soit w un mot ; supposons que w_1 et w_2 s'obtiennent à partir de w par une simplification. Une analyse de cas facile montre qu'il existe deux mots équivalents w_1' et w_2' tels que, pour $i = 1, 2$, w_i' s'obtient à partir de w_i par zéro ou une simplification.

Soit W une $\widetilde{\gamma}$-classe de mots. Supposons que W se réduise élémentairement à W_1 et W_2. Soit $w \in W$; d'après le premier paragraphe, il existe w_1 et w_2 dans W_1 et W_2 tels que w se simplifie en w_1 et w_2. Il s'ensuit, d'après le deuxième paragraphe, qu'il existe W_3 déduit de W_1 et W_2 par zéro ou une réduction élémentaire.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat par induction sur la longueur de la $\widetilde{\gamma}$-classe de mots ; le lemme est trivial si la longueur est 0 ou 1. Supposons que le lemme soit vrai pour toutes les $\widetilde{\gamma}$-classes de mots de longueur au plus n ; soit W une $\widetilde{\gamma}$-classe de mots de longueur $n + 1$. Si W est réductible, considérons deux $\widetilde{\gamma}$-classes de mots quelconques W_1 et W_2 obtenues à partir de W par une réduction élémentaire. D'après le paragraphe précédent, W_1 et W_2 se réduisent (avec zéro ou une réduction) à une certaine classe W_3. D'après l'hypothèse de récurrence, chacune des classes W_1, W_2 et W_3 se réduit en une unique $\widetilde{\gamma}$-classe de mots irréductible, qui doit donc être la même pour toutes ces classes ; ce qui conclut la démonstration. □

Supposons qu'une c-réduction élémentaire soit possible sur $[\widetilde{C}/\widetilde{\gamma}]$. Fixons une période relevée $\widetilde{p}$ de $\widetilde{\gamma}$, de sorte que cette réduction élémentaire corresponde à un facteur $c^\alpha\bar{c}^\alpha$ ou $\bar{c}^\alpha c^\alpha$ sur $\widetilde{C}/\widetilde{p}$. Soient a et a' les deux points d'intersection correspondant aux deux lettres de ce facteur, et soient c_1^α et $\widetilde{p}_1$ les sous-chemins de c^α et $\widetilde{p}$ entre a et a'. Les projections de ces deux sous-chemins sur $\mathcal{M}$ sont homotopes. Nous utiliserons souvent l'opération élémentaire suivante de *décroisement* (figure 3.10) : nous remplaçons $\widetilde{p}_1$ par un chemin ayant les mêmes extrémités et

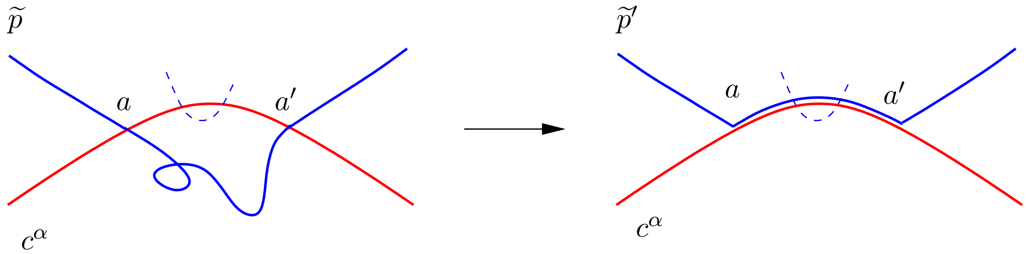


FIG. 3.10 – L'opération fondamentale de décroisement entre deux courbes c^α et $\widetilde{p}$, se croisant en a et a', correspondant à une réduction élémentaire sur $[\widetilde{C}/\widetilde{\gamma}]$. Les chemins $\widetilde{p}_1$ et c_1^α sont les sous-chemins de $\widetilde{p}$ et c^α entre a et a'. Le chemin $\widetilde{p}_1$ n'est pas nécessairement simple et c_1^α peut croiser d'autres portions de $\widetilde{p}$.

qui longe c_1^α. L'effet de cette opération est la suppression des deux croisements a et a'. Soit $\widetilde{p}'$ le chemin $\widetilde{p}$ après cette opération et soit $\widetilde{\gamma}'$ le relevé géométrique correspondant du cycle γ' dont $\widetilde{p}'$ est une période relevée ; $[\widetilde{C}/\widetilde{\gamma}]$ se réduit élémentairement à $[\widetilde{C}/\widetilde{\gamma}']$, et les cycles γ et γ' sont homotopes.

Proposition 3.21 *Soit C une famille de courbes simples et deux à deux disjointes sur $\mathcal{M}$; soit $\widetilde{C}$ l'ensemble des relevés géométriques des courbes de C. Supposons que chaque élément de $\widetilde{C}$ sépare $\widetilde{\mathcal{M}}$ en deux composantes connexes. Soit γ un cycle dans $\mathcal{M}$, homotope à un cycle γ' qui est disjoint de C, et soit $\widetilde{\gamma}$ un relevé de γ. Alors* $\mathrm{red}([\widetilde{C}/\widetilde{\gamma}]) = [\varepsilon]_{\widetilde{\gamma}}$.

DÉMONSTRATION. Soient p et p' les restrictions de γ et γ' à $[0,1]$. Il existe un chemin β joignant $p(0)$ à $p'(0)$ tel que le chemin $q := \beta^{-1}.p.\beta.p'^{-1}$ est contractile dans $\mathcal{M}$. Soit $\widetilde{q}$ un relevé de q, concaténation de l'inverse de β^0, de $\widetilde{p}$, de β^1 et de l'inverse de $\widetilde{p}'$ (respectivement relevés de β, p, β et p'). Choisissons $\widetilde{q}$ de sorte que $\widetilde{p}$ est une période relevée de $\widetilde{\gamma}$.

Comme p' est disjoint de $\widetilde{C}$, $w := \widetilde{C}/\widetilde{q}$ est la concaténation de $\widetilde{C}/(\beta^0)^{-1}$, $\widetilde{C}/\widetilde{p}$ et $\widetilde{C}/\beta^1$. De plus, $\tau_{\widetilde{\gamma}}(\beta^0)$ est égal à β^1 ; donc, si la $k^{\text{ième}}$ lettre de $\widetilde{C}/\beta^0$ est c^α (resp. $\bar{c}^\alpha$), alors la $k^{\text{ième}}$ lettre de $\widetilde{C}/\beta^1$ est $\tau_{\widetilde{\gamma}}(c^\alpha)$ (resp. $\overline{\tau_{\widetilde{\gamma}}(c^\alpha)}$). Il s'ensuit que $[w]_{\widetilde{\gamma}}$ se réduit à $[\widetilde{C}/\widetilde{p}]_{\widetilde{\gamma}} = [\widetilde{C}/\widetilde{\gamma}]$. Maintenant, d'après le lemme 3.10, w est parenthésé, donc $[w]_{\widetilde{\gamma}}$ se réduit aussi à $[\varepsilon]_{\widetilde{\gamma}}$. Le lemme 3.20 permet de conclure. □

3.3.3.2 Courbes sur un cylindre ou un pantalon

Dans cette section, nous utilisons les mots des croisements pour démontrer des propriétés de base concernant les courbes sur un cylindre ou un pantalon. Chaque surface considérée ici est supposée munie d'un graphe plongé G, utilisé pour le calcul des longueurs des courbes.

Pour des cycles. Étudions l'existence, dans un pantalon ou un cylindre, de plus courts cycles homotopes qui sont simples.

Proposition 3.22 *Soient K un cylindre ou un pantalon, et γ un cycle homotope à un bord de K. Il existe un cycle* simple *homotope à γ et pas plus long que γ.*

Nous nous contentons de donner une démonstration dans le cas où K est un pantalon ; la démonstration du cas où K est un cylindre est plus simple. La démonstration repose sur les deux lemmes suivants. Soit p un plus court chemin entre les deux bords de K qui ne sont pas homotopes à γ ; p peut être supposé simple. Soit K' le cylindre obtenu par découpage de K le long de p, et soit p' un plus court chemin (simple) dans K' joignant un point de chaque bord de K'.

Lemme 3.23 *Il existe un cycle γ', homotope à γ et pas plus long que γ, qui ne croise pas p.*

Démonstration. Soient $\widetilde{p}$ l'ensemble des relevés géométriques de p, et $\widetilde{\gamma}$ un relevé de γ. $[\widetilde{p}/\widetilde{\gamma}]$ se réduit à $[\varepsilon]_{\widetilde{\gamma}}$ d'après la proposition 3.21 ; si cette classe n'est pas vide, soient $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{p}_1$ les sous-chemins de $\widetilde{\gamma}$ et de l'élément de $\widetilde{p}$ correspondant à une réduction élémentaire. Comme p est un plus court chemin, $|\widetilde{p}_1| \leqslant |\widetilde{\gamma}_1|$, et on peut, comme sur la figure 3.10, procéder à la réduction élémentaire en changeant γ en un autre cycle, homotope à γ et pas plus long que γ, ayant deux croisements de moins que γ avec p. La démonstration est achevée par récurrence sur le nombre de croisements entre γ et p. $\square$

Lemme 3.24 *Il existe un cycle γ'' dans le cylindre K', pas plus long que γ', homotope à γ' dans K', qui croise p' exactement une fois.*

Démonstration. Soient $\widetilde{\gamma}'$ un relevé de γ' et $\widetilde{p}'$ l'ensemble des relevés géométriques de p' dans le revêtement universel de K'. Le cycle γ' est homotope, dans K', aux bords de K'. La classe de mots des croisements $[\widetilde{p}'/\widetilde{\gamma}']$ se réduit à une classe de mots irréductible $[w]_{\widetilde{\gamma}'}$, où w contient exactement une lettre. En effet, les nombres de lettres avec et sans barre dans w diffèrent d'exactement un ; si w contient plus d'une lettre, alors il doit exister dans w deux lettres avec et sans barre consécutives, ce qui implique une réduction élémentaire possible. Donc, si γ' croise p' au moins deux fois, une réduction élémentaire est possible. Soient $\widetilde{\gamma}'_1$ et $\widetilde{p}'_1$ les sous-chemins de $\widetilde{\gamma}$ et de l'élément de $\widetilde{p}'$ dans le revêtement universel de K' correspondant à cette réduction. Comme dans la démonstration du lemme 3.23, nous pouvons modifier γ' pour obtenir un cycle pas plus long, homotope dans K', qui croise p' en deux points de moins. On termine par induction sur la longueur de $[\widetilde{p}'/\widetilde{\gamma}']$. $\square$

Démonstration de la proposition 3.22. D'après les lemmes 3.23 et 3.24, nous pouvons supposer que γ ne croise pas p, et croise p' exactement une fois, disons en un point a. Coupons le cylindre K' le long de p' ; nous obtenons deux copies a' et a'' de a, et γ est transformé en un chemin entre a' et a''. Donc, un plus court chemin entre a' et a'' donne un cycle dans K' qui peut être choisi simple, pas plus long que γ, et homotope à γ dans K. $\square$

En fait, les techniques employées dans cette démonstration mènent à un algorithme pour calculer un plus court cycle homotope à un bord donné d'un cylindre ou d'un pantalon ; nous reviendrons sur ce point en détail dans la section 3.5.

Pour des chemins. Voici quelques résultats concernant les plus courts chemins homotopes sur les cylindres et les pantalons.

Proposition 3.25 *Soit K un cylindre ou un pantalon, et soit γ un bord de K. Supposons que γ soit un plus court cycle parmi les cycles simples de sa classe d'homotopie. Soit q un chemin dans K dont les extrémités sont sur γ et qui est homotope dans K à un chemin dont l'image est inclus dans l'image de γ. Alors q^*, le plus court chemin inclus dans γ homotope à q, n'est pas plus long que q.*

À nouveau, nous présentons la démonstration dans le cas où K est un pantalon. Soit p un plus court chemin entre les deux bords de K qui ne sont pas homotopes à γ ; p peut être choisi simple. Soit K' le cylindre obtenu après découpage de K le long de p.

Lemme 3.26 *Il existe un chemin q', homotope à q et pas plus long que q, qui ne coupe pas p.*

Démonstration. Analogue à la démonstration du lemme 3.23. □

Démonstration de la proposition 3.25. D'après le lemme 3.26, et comme $q^* = q'^*$, nous pouvons supposer que q appartient à K'. La démonstration se fait par récurrence sur le nombre $c(q)$ d'auto-intersections de q. Si $c(q) = 0$, q est homotope dans K' à un sous-chemin simple de γ, et le résultat provient de la minimalité en longueur de γ. Supposons que $c(q) > 0$ et que le résultat est vrai pour toutes les valeurs plus petites de $c(q)$. Soit c_1 un sous-chemin fermé simple de q et soit q_1 le chemin obtenu à partir de q en supprimant la boucle c_1 ; $c(q_1) = c(q) - 1$. Le lacet c_1 est soit contractile, soit librement homotope aux bords de K', d'après le théorème 1.11, page 30.

Si c_1 est contractile, alors $q^* = q_1^*$. D'après l'hypothèse de récurrence, $|q_1^*| \leqslant |q_1|$; nous avons aussi $|q_1| \leqslant |q|$, ce qui conclut dans ce cas. Si c_1 est homotope à γ ou à son inverse, q est homotope à $q_1.\ell$ ou $q_1.\ell^{-1}$, où ℓ est un lacet associé à γ, et donc $|q^*| \leqslant |q_1^*| + |\gamma|$. Par hypothèse de récurrence, ceci ne peut être plus grand que $|q_1| + |\gamma|$, qui à son tour ne peut être plus grand que $|q_1| + |c_1| = |q|$. □

Pour des systèmes de découpage par cycles. Commençons par une proposition.

Proposition 3.27 *Soit s un système de découpage par cycles de $\mathcal{M}$. Soient s_{k_1} et s_{k_2} des cycles de s qui sont $\pm$* homotopes *(*i.e.*, s_{k_1} et s_{k_2} sont homotopes ou s_{k_1} et l'inverse de s_{k_2} le sont). Alors il existe une suite $s_{k_1} = s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_p} = s_{k_2}$ de cycles $\pm$ homotopes de s tels que deux cycles consécutifs de cette suite bordent un cylindre dont l'intérieur est disjoint des cycles de s.*

Démonstration. D'après le lemme 1.9, s_{k_1} et s_{k_2} bordent un cylindre K. Tout cycle de s à l'intérieur de K doit être $\pm$ homotope à s_{k_1} et s_{k_2} : sinon, un tel cycle serait contractile ou non simple. Il s'ensuit que chaque composante connexe de la surface K découpée le long des cycles de s est un cylindre. Donc, les cycles de s dans K peuvent être ordonnés $s_{k_1} = s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_p} = s_{k_2}$ de sorte que deux cycles consécutifs de cette suite bordent un cylindre ne contenant aucun cycle de s. □

Proposition 3.28 *Soit s un système de découpage par cycles de $\mathcal{M}$. Supposons que γ soit à l'intérieur d'une composante connexe K de la surface obtenue par découpage de $\mathcal{M}$ le long des cycles de s (K est un cylindre ou un pantalon), et homotope dans $\mathcal{M}$ à un cycle s_k. Alors γ est homotope,* dans K, *à un bord de K.*

La difficulté de cette proposition vient du fait que γ peut s'auto-intersecter ; sinon, la même technique que la proposition précédente pourrait s'appliquer. Commençons par un lemme simple.

Lemme 3.29 *Soit K une surface compacte incluse dans $\mathcal{M}$ dont les bords ne sont pas contractiles dans $\mathcal{M}$. Alors tout cycle dans K qui est contractile dans $\mathcal{M}$ est aussi contractile dans K.*

Démonstration. Soit $(\widetilde{\mathcal{M}}, \pi)$ le revêtement universel de $\mathcal{M}$; il suffit de montrer que $\pi^{-1}(K)$ est simplement connexe. Si ce n'est pas le cas, il existe un cycle simple et non contractile γ dans $\pi^{-1}(K)$. Un tel cycle borde un disque D dans $\widetilde{\mathcal{M}}$, d'après le théorème 1.8, page 30, et D n'est pas entièrement contenu dans $\pi^{-1}(K)$. Donc il y a un relevé $\widetilde{\gamma}'$ d'un bord γ' de K à l'intérieur de D. Cela est impossible car $\widetilde{\gamma}'$ contient une infinité de relevés d'un point de $\mathcal{M}$ (d'après le lemme 1.10, page 30). □

Démonstration de la proposition 3.28. Nous supposons encore que K est un pantalon. Soit $\widetilde{s}$ l'ensemble des relevés géométriques des cycles de s. Soit γ' un cycle « longeant » s_k : γ' est simple, disjoint de tous les cycles de s, et homotope, dans la surface obtenue par découpage de $\mathcal{M}$ le long de $s \setminus s_k$, à s_k. Soient p et p' les restrictions de γ et γ' à $[0,1]$. Il existe un chemin β joignant $p(0)$ à $p'(0)$ tel que le chemin $q := \beta^{-1}.p.\beta.p'^{-1}$ est contractile dans $\mathcal{M}$. Soit $\widetilde{q}$ un relevé de q, concaténation de l'inverse d'un relevé β^0 de β, d'un relevé $\widetilde{p}$ de p, d'un relevé β^1 de β, et de l'inverse d'un relevé $\widetilde{p}'$ de p'.

Sans perte de généralité, supposons que $\widetilde{s}/\beta^0$ est irréductible. Si ce mot des croisements est vide, alors q est contractile dans K d'après le lemme 3.29, donc γ et γ' sont homotopes dans K ; il en est de même pour γ et s_k, ce qui conclut. Supposons que ce mot des croisements ne soit pas vide.

Comme p et p' ne croisent pas s, $\widetilde{s}/\widetilde{q}$ est la concaténation de $\widetilde{s}/(\beta^0)^{-1}$ et $\widetilde{s}/\beta^1$. Puisque $\widetilde{s}/\beta^0$ est irréductible, il en est de même pour $\widetilde{s}/(\beta^0)^{-1}$ et $\widetilde{s}/\beta^1$; comme $\widetilde{s}/\widetilde{q}$ admet une réduction élémentaire (car q est un chemin fermé), il y a exactement une réduction élémentaire possible sur ce mot, qui est sur la dernière lettre de $\widetilde{s}/(\beta^0)^{-1}$ et la première lettre de $\widetilde{s}/\beta^1$. Donc les premiers éléments de $\widetilde{s}$ croisés par β^0 et β^1 doivent être un seul et même relevé s_j^α. Soit β' le début de β avant son premier croisement avec s ; nous obtenons que $\beta'^{-1}.p.\beta'$ est homotope à la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un lacet ℓ_j associé à s_j dans $\mathcal{M}$, pour un certain n. Cette homotopie peut en fait être prise dans K d'après le lemme 3.29. Il reste donc à montrer que $n \in \{-1, 1\}$.

Il existe un lacet ℓ_k associé à s_k et un chemin δ tels que $\delta.\ell_k.\delta^{-1}$ est homotope (dans $\mathcal{M}$) à la $n^{\text{ième}}$ puissance de ℓ_j. Donc ℓ_k est homotope à la $n^{\text{ième}}$ puissance de $\delta^{-1}.\ell_j.\delta$. Comme ℓ_k est simple, il découle d'après le théorème 1.11 que $|n| \leqslant 1$. Donc γ est homotope, dans K, à s_j ou son inverse. □

3.3.3.3 Démonstration du theorème 3.7

Considérons un système de découpage par cycles $s = (s_1, \ldots, s_N)$ de $\mathcal{M}$; soit $\widetilde{s}$ l'ensemble des relevés géométriques des courbes de s dans $\widetilde{\mathcal{M}}$. Pour $i \in [1, N]$, fixons une énumération arbitraire $(s_i^\alpha)_{\alpha \in I_i}$ des relevés géométriques de s_i.

Fixons $j \in [1, N]$; soit $r \in \mathrm{rac}_j(s)$. Soit $\widetilde{r}$ l'ensemble des relevés géométriques des cycles de r ; nous donnons une énumération des relevés géométriques de r_k, pour tout k, de la façon suivante. Choisissons l'énumération des relevés géométriques de r_k, pour $k \neq j$, comme l'énumération des relevés géométriques de s_k (*i.e.*, $r_k^\alpha = s_k^\alpha$). Il reste à définir l'énumération des relevés géométriques de r_j. Soit P_j la surface définie par $s \setminus s_j$ qui contient s_j. On choisit d'abord un cycle γ_j dans P_j tel que γ_j est disjoint de s_j et r_j. (C'est toujours possible car s_j est homotope à un bord de P_j.) Donc s_j et γ_j bordent un cylindre dans P_j d'après le lemme 1.9, page 30 ; les relevés de ce cylindre dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ sont des bandes infinies disjointes qui ne contiennent aucun relevé de s ou γ_j dans leur intérieur. Nous pouvons donc choisir une énumération des relevés géométriques de γ_j telle que, pour tout α, s_j^α et γ_j^α bordent une bande qui ne contient aucun relevé de s ou γ_j dans son intérieur. De la même façon, avec γ_j et r_j (qui bordent un cylindre dans P_j), nous obtenons une énumération des relevés géométriques de r_j.

Finalement, fixons $i \in [1, N]$; soit t_i un plus court cycle parmi les cycles homotopes à s_i (t_i n'est pas nécessairement simple), et soit $\widetilde{t}_i$ un relevé de t_i. Dorénavant, les mots des croisements concernant les relevés géométriques de s et r seront écrits en utilisant l'énumération décrite ci-dessus et en omettant les « r » et les « s ». Par exemple, nous écrirons $^3_1\ \overline{^7_5}\ \overline{^4_2}$ au lieu de $s_1^3\ \overline{s_5^7}\ \overline{s_2^4}$. Cela permet d'écrire, par exemple, que $[\widetilde{r}/\widetilde{t}_i] = [\widetilde{s}/\widetilde{t}_i]$ si t_i ne coupe ni r_j ni s_j.

Proposition 3.30 $\mathrm{red}_j([\widetilde{r}/\widetilde{t}_i]) = \mathrm{red}_j([\widetilde{s}/\widetilde{t}_i])$.

Appelons $\widetilde{s}_j$ l'ensemble des relevés géométriques de s_j, avec l'énumération induite par $\widetilde{s}$; définissons de même $\widetilde{r}_j$.

Lemme 3.31 *Soit p un chemin dans P_j dont les extrémités sont sur le bord de P_j, et soit $\widetilde{p}$ un relevé de p. Alors $\widetilde{s}_j/\widetilde{p}$ et $\widetilde{r}_j/\widetilde{p}$ se réduisent au même mot irréductible.*

Démonstration. Supposons d'abord s_j et r_j disjoints ; ils bordent un cylindre K inclus dans l'intérieur de P_j. Les relevés de K dans le revêtement universel de $\mathcal{M}$ sont des bandes infinies deux à deux disjointes bordées par r_j^α et s_j^α, d'après le choix de l'énumération des relevés géométriques de r_j. De plus, $\widetilde{p}$ a ses extrémités en dehors de ces bandes. Divisons $\widetilde{p}$ en sous-chemins $\widetilde{p}_i$, $i = 1, \ldots, n$, chacun entrant exactement dans une bande, et exactement une fois dans cette bande, de sorte que leurs extrémités soient en dehors des bandes. Clairement, $\widetilde{s}_j/\widetilde{p}_i$ et $\widetilde{r}_j/\widetilde{p}_i$ se réduisent au même mot irréductible (il y a deux cas selon que $\widetilde{p}_i$ entre et sort de la bande par le même bord ou non) ; d'où le résultat.

Pour le cas général, soit γ_j un cycle simple homotope dans P_j à r_j et s_j, et qui ne coupe ni r_j ni s_j. Nous énumérons les relevés géométriques de γ_j de façon que γ_j^α et r_j^α (ou s_j^α) bordent une bande infinie. En appliquant le raisonnement du paragraphe précédent à s_j et γ_j, puis à γ_j et r_j, on obtient bien le résultat. □

Démonstration de la proposition 3.30. Supposons d'abord que t_i est inclus dans P_j. D'après la proposition 3.21, nous avons $\mathrm{red}([\widetilde{r}/\widetilde{t_i}]) = [\varepsilon]_{\widetilde{t_i}} = \mathrm{red}([\widetilde{s}/\widetilde{t_i}])$. Mais ceci vaut aussi $\mathrm{red}_j([\widetilde{r}/\widetilde{t_i}])$ et $\mathrm{red}_j([\widetilde{s}/\widetilde{t_i}])$, ce qui conclut la démonstration. Si t_i n'est pas entièrement compris dans P_j, soient alors t'_i un sous-chemin maximal de t_i qui est à l'intérieur de P_j, et $\widetilde{t'_i}$ un relevé de t'_i ; il suffit de montrer que $\widetilde{r}_j/\widetilde{t'_i}$ et $\widetilde{s}_j/\widetilde{t'_i}$ se réduisent au même mot irréductible ; mais cela découle du lemme 3.31. □

Proposition 3.32 *Il existe un cycle t'_i, homotope à t_i et pas plus long que t_i, et un relevé $\widetilde{t'_i}$ de t'_i, tel que $[\widetilde{r}/\widetilde{t'_i}]$ est une $\widetilde{t_i}$-classe de mots égale à $\mathrm{red}_j([\widetilde{s}/\widetilde{t_i}])$.*

Démonstration. D'après la proposition 3.30, $[\widetilde{r}/\widetilde{t_i}]$ se j-réduit à $\mathrm{red}_j([\widetilde{s}/\widetilde{t_i}])$. Si $[\widetilde{r}/\widetilde{t_i}]$ est j-irréductible, il n'y a rien à montrer. Sinon, une j-réduction élémentaire est possible sur $[\widetilde{r}/\widetilde{t_i}]$. On peut appliquer la proposition 3.25 au sous-chemin de t_i correspondant à cette j-réduction, et effectuer l'opération de décroisement sur t_i. On obtient un relevé $\widetilde{t'_i}$ d'un cycle t'_i qui est homotope à t_i et pas plus long que t_i. Clairement, $\tau_{\widetilde{t_i}} = \tau_{\widetilde{t'_i}}$, ce qui implique que les ensembles des $\widetilde{t_i}$-classes et des $\widetilde{t'_i}$-classes de mots sont égaux. De plus, $[\widetilde{r}/\widetilde{t'_i}]$ est obtenu à partir de $[\widetilde{r}/\widetilde{t_i}]$ par cette j-réduction élémentaire. On obtient le t'_i souhaité par récurrence. □

Proposition 3.33 *Supposons que t_i soit disjoint de s, et que t_i et s_k soient $\pm$ homotopes dans le cylindre ou le pantalon défini par s contenant t_i. Alors il existe un cycle t'_i, homotope à t_i et pas plus long que t_i, qui est disjoint de r et qui est $\pm$ homotope à r_k dans le cylindre ou le pantalon défini par r contenant t'_i.*

Démonstration. Soit K le cylindre ou le pantalon défini par s contenant t_i. La démonstration est triviale si s_j n'est pas un bord de K. Si s_j est $\pm$ homotope à t_i dans K, alors soit $s_j = s_k$, soit K est le cylindre bordé par s_j et s_k. Dans les deux cas, il est facile de conclure : en effet, t_i peut être supposé simple d'après la proposition 3.22 ; il en découle que $|r_j| = |t_i|$, et l'on peut prendre pour t'_i une copie légèrement translatée de r_j ou r_j^{-1}.

Il demeure le cas où s_j n'est pas $\pm$ homotope à t_i dans K (et donc K est un pantalon). P_j contient t_i ; un bord de P_j est un cycle γ homotope à r_j dans P_j, et un autre bord est r_k. Les cycles r_j et γ bordent un cylindre K' dans P_j, et r_j est optimal dans K'. Alors, en utilisant la proposition 3.25, tout sous-chemin maximal de t_i dans K' peut être décroisé dans la partie complémentaire K de P_j, supprimant ainsi les croisements avec r_j. □

Concluons maintenant la démonstration du théorème 3.7.

Démonstration du théorème 3.7. Si s et $s' \in \mathrm{rac}_i(s)$ sont deux systèmes de découpage par cycles considérés au cours du processus, nous écrirons par abus de notation $s' = \mathrm{rac}_i(s)$. Soit $\widetilde{s}^0$ l'ensemble des relevés géométriques de s^0, énumérés de façon arbitraire. Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, on construit une énumération $\widetilde{s}^n$ des relevés géométriques de s^n, cette énumération étant choisie comme indiqué au début de la section 3.3.3.3.

Soit $\widetilde{t_i^0}$ un relevé d'un plus court cycle t_i^0 homotope à s_i^0. D'après la proposition 3.21, $[\widetilde{s}^0/\widetilde{t_i^0}]$ se réduit à $[\varepsilon]_{\widetilde{t_i^0}}$. D'après la proposition 3.32, on peut construire une suite $(\widetilde{t_i^n})_{n\in\mathbf{N}}$ de relevés de plus courts cycles homotopes tels que la longueur de $[\widetilde{s}^n/\widetilde{t_i^n}]$ décroît strictement jusqu'à devenir le mot vide à une certaine étape n. D'après la proposition 3.28, t_i^n et un cycle s_k^n sont homotopes dans le cylindre ou le pantalon défini par s^n contenant t_i^n. Par $k-1$ applications de la proposition 3.33, et en utilisant ensuite la proposition 3.22, $|s_k^{n+1}| = |t_i^n|$. Les cycles s_k^{n+1} et s_i^{n+1} sont $\pm$ homotopes, donc, d'après la proposition 3.27, il y a une suite finie de p cylindres séparant s_k^{n+1} et s_i^{n+1}. Ceci implique qu'après p nouvelles itérations de rac, tous les cycles de ces cylindres doivent avoir la longueur de s_k^{n+1} ; en particulier, $|s_i^{n+1+p}| = |t_i^{n+1+p}|$. De ceci, il découle que la longueur de $(s_i^n)_{n\in\mathbf{N}}$ devient stationnaire. Il reste à montrer que toutes les longueurs restent fixées une fois que s^n et s^{n+1} ont la même longueur. Supposons que s et $s' \in \mathrm{rac}(s)$ ont la même longueur, et soit $i \in [1, N]$; nous allons montrer que s_i a la même longueur que t_i (un plus court cycle homotope à s_i).

$[\widetilde{s}/\widetilde{t_i}]$ se réduit à la classe de mots vide ; supposons qu'une j-réduction élémentaire soit possible. Soient $\hat{t}_i$ et $\hat{s}_j$ les sous-chemins de $\widetilde{t_i}$ et du relevé de s_j qui correspondent à cette j-réduction. Nous allons montrer que les deux sous-chemins ont la même longueur. Il en découlera que nous pouvons modifier t_i sans changer sa longueur ni sa classe d'homotopie pour procéder à la j-réduction dans $[\widetilde{s}/\widetilde{t_i}]$; donc par récurrence on pourra supposer que $[\widetilde{s}/\widetilde{t_i}] = \varepsilon$.

Si $j \neq 1$, seuls des relevés géométriques de $(\mathrm{rac}_1(s))_1$ apparaissent dans le mot $\mathrm{rac}_1(s)/\hat{t}_i$; d'après le lemme 3.10, ce mot est parenthésé. D'après la proposition 3.25, nous pouvons supprimer itérativement tous les croisements entre $\hat{t}_i$ et $\mathrm{rac}_1(s)$. Ce faisant, $\hat{t}_i$ est remplacé par un chemin $\hat{t}'_i$ ayant les mêmes extrémités et qui ne coupe pas $\mathrm{rac}_1(s)$. En itérant le raisonnement, nous obtenons l'existence d'un chemin $\hat{t}''_i$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}$, pas plus long que $\hat{t}_i$, ayant les mêmes extrémités que $\hat{t}_i$, et qui ne croise aucun relevé de $s'' := \mathrm{rac}_{j-1} \circ \ldots \circ \mathrm{rac}_1(s)$. De plus, $s''_j = s_j$ est optimal dans les cylindres ou pantalons qu'il borde, parce que s'' a la même longueur que $\mathrm{rac}_j(s'')$. Conséquemment, d'après la proposition 3.25, $\hat{s}_j$ ne peut pas être plus long que $\hat{t}''_i$. Donc $|\hat{s}_j| = |\hat{t}''_i| = |\hat{t}_i|$.

Nous pouvons donc supposer (quitte à changer t_i) que $[\widetilde{s}/\widetilde{t_i}] = \varepsilon$. D'après la proposition 3.28, t_i et un cycle s_k sont homotopes dans le cylindre ou le pantalon défini par s contenant t_i. Par $k-1$ applications de la proposition 3.33, et ensuite d'après la proposition 3.22, on peut supposer que t_i et s_k bordent un cylindre dont l'intérieur est disjoint de cycles de $\mathrm{rac}_{k-1} \circ \ldots \circ \mathrm{rac}_1(s)$. Ceci implique que $|s_k| = |t_i|$, ce qui termine la démonstration si $k = i$. Si $k \neq i$, il existe, d'après la proposition 3.27, une suite de cycles $\pm$ homotopes $s_{i_2}, \ldots, s_{i_{p-1}}$ entre s_k et s_i ; tous ces cycles doivent avoir la même longueur, car sinon la longueur d'un des cycles décroîtrait après l'application de rac à s. Ceci conclut la démonstration. □

3.4 Complétion d'un plongement en un système de découpage

Dans cette section, nous nous intéressons au problème d'optimiser des plongements de graphe ou de cycles, sans supposer que ces plongements constituent un système de découpage. L'idée est de compléter une telle famille de courbes en un système de découpage et d'optimiser le système de découpage à l'aide de l'un des théorèmes de la section 3.2. D'après ces théorèmes, le système de découpage résultant contient des courbes qui sont, individuellement, les plus courtes possibles dans une certaine classe (d'homotopie ou d'isotopie). Autrement dit, la complétion en un système de découpage ne constitue pas une obstruction aux raccourcissements, elle permet même de donner un algorithme simple pour cela !

Dans toute la suite, nous supposons que le plongement de graphe ou de cycles d'entrée ne contient aucun chemin ou cycle contractile. Si le plongement d'entrée a des courbes contractiles, celles-ci, étant aussi simples, bordent un disque topologique en vertu du théorème 1.8, page 30. Un traitement préliminaire consiste donc à effectuer ce test et à supprimer les éventuelles courbes contractiles.

3.4.1 Systèmes de découpage par graphe

Soulignons que les graphes dont nous considérons des plongements sont sans sommet isolé et peuvent avoir des boucles et des arêtes multiples. Un tel plongement est donc une famille de chemins simples et deux à deux disjoints, sauf éventuellement en des extrémités communes.

Théorème 3.34 *Soient g le genre de $\mathcal{M}$ et b le nombre de ses bords. Soit $s = (s_1, \ldots, s_n)$ un plongement régulier de graphe sur $\mathcal{M}$, ne contenant aucun chemin contractile. Alors il est possible de compléter s en un système de découpage par graphe $(s_1, \ldots, s_N)$ (avec $N \geqslant n$) dont chaque sommet est un sommet de s ou un point du bord de $\mathcal{M}$ (ou, si $\mathcal{M}$ est sans bord et s est vide, avec un seul sommet), avec $N = O(n + g + b)$.*

Commençons d'abord par un lemme.

Lemme 3.35 *Soit $\mathcal{M}$ une surface compacte, orientable ; soient $k \geqslant 1$ le nombre de ses composantes connexes, g son genre et b le nombre de ses bords ; supposons $b \geqslant 1$. Soit c un chemin simple sur $\mathcal{M}$ qui intersecte le bord de $\mathcal{M}$ exactement en ses extrémités ; soit $\mathcal{M}'$ la surface obtenue par découpage de $\mathcal{M}$ le long de c ; soient k' le nombre de ses composantes connexes, g' son genre et b' son nombre de bords. Alors l'une des assertions suivantes est vraie :*

- *$k' = k + 1$, $g' = g$ et $b' = b + 1$ (cas d'un chemin séparateur) ;*
- *$k' = k$, $g' = g - 1$ et $b' = b + 1$ (cas d'un chemin non séparateur dont les extrémités sont sur le même bord de $\mathcal{M}$) ;*
- *$k' = k$, $g' = g$ et $b' = b - 1$ (cas d'un chemin non séparateur dont les extrémités sont sur deux bords différents de $\mathcal{M}$).*

Démonstration. Soient $\chi(\mathcal{M})$ et $\chi(\mathcal{M}')$ les caractéristiques d'Euler de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$. Nous avons $\chi(\mathcal{M}') = \chi(\mathcal{M}) + 1$; en effet, χ ne dépend pas de la triangulation

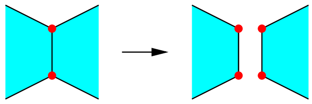


Fig. 3.11 – Un découpage le long d'un chemin qui intersecte le bord de la surface exactement en ses extrémités, augmente la caractéristique d'Euler de la surface d'une unité.

de la surface choisie (c'est un invariant topologique) et on peut toujours trianguler $\mathcal{M}$ de telle sorte que c soit une arête de $\mathcal{M}$; l'opération de découpage revient alors à dupliquer c et les deux sommets incidents (figure 3.11). La caractéristique d'Euler étant égale au nombre de sommets et de faces moins le nombre d'arêtes, elle augmente de un lors du découpage. Or $\chi(\mathcal{M}) = 2k - 2g - b$ et $\chi(\mathcal{M}') = 2k' - 2g' - b'$. Donc nous avons :

$$2(k' - k) - 2(g' - g) - (b' - b) = 1. \tag{3.1}$$

Il est clair que $k' - k$ est entre 0 et 1 et que $b' - b$ est entre -1 et 1 ; la formule (3.1) montre alors que $b' - b$ est impair, donc vaut soit -1, soit 1. D'autre part, si $k' = k + 1$, alors on ne peut avoir $b' = b - 1$, car chaque « côté » de c va faire partie d'un bord dans la surface découpée. □

Démonstration du théorème 3.34. Soit $\mathcal{M}'$ la surface obtenue à partir de $\mathcal{M}$ par découpage le long des chemins $s_1, \ldots, s_n$. Montrons que $\mathcal{M}'$ a au plus $n + 1$ composantes connexes, est de genre total au plus $g + n$ et a au plus $b + 3n$ bords. Pour chaque sommet v de s, on construit un disque D_v choisi comme dans la section 3.3.2.2. Soit $\mathcal{M}_1$ la surface $\mathcal{M}$ à laquelle on a retiré les disques D_v. Le découpage de $\mathcal{M}_1$ le long des chemins de s donne une surface $\mathcal{M}'_1$ qui est topologiquement équivalente à la surface $\mathcal{M}'$; en particulier, ces deux surfaces ont même nombre de composantes connexes, même genre et même nombre de bords. $\mathcal{M}_1$ est connexe, a pour genre g et a un nombre de bords égal à b plus le nombre de sommets de s dans l'intérieur de $\mathcal{M}$ (qui est lui-même inférieur à $2n$). Le lemme précédent montre que $\mathcal{M}'_1$ a au plus $n + 1$ composantes connexes, est de genre au plus $g + n$, et a au plus $b + 3n$ bords ; il en est de même pour $\mathcal{M}'$.

Considérons une composante connexe de $\mathcal{M}'$; soient g' son genre et b' le nombre de ses bords. Chacun de ces b' bords contient au moins un point qui est, après recollement, soit sur le bord de $\mathcal{M}$, soit un sommet de s. On peut donc trouver un schéma polygonal à $4g' + 3b'$ côtés sur cette surface, de sorte que, après recollement le long des chemins de s, chaque sommet de ce schéma soit un sommet de s ou sur un bord de $\mathcal{M}$. (Si $\mathcal{M}'$ est sans bord, cela signifie que $n = 0$ et on peut trouver un schéma polygonal à un sommet sur $\mathcal{M}'$.) Nous avons donc un plongement régulier de graphe qui découpe $\mathcal{M}$ en une union disjointe de disques fermés à $O(n+g+b)$ chemins et dont les sommets seront, après recollement le long des chemins de s, soit des sommets de s, soit sur le bord de $\mathcal{M}$. Pour transformer ce plongement régulier de graphe en un système de découpage par graphe, il est alors suffisant de « dédoubler » tous les chemins de ce plongement : pour chaque chemin c du plongement, on ajoute un chemin qui « longe » c (le graphe a donc des arêtes multiples). La nouvelle famille ainsi constituée est bien un système de découpage par graphe, à $N = O(n + g + b)$ chemins. □

On en déduit immédiatement le corollaire suivant, avec le point 2 du théorème 3.2 :

Corollaire 3.36 *Soit c un chemin simple dont l'intersection avec $\partial\mathcal{M}$ est exactement ses extrémités. Soit C l'ensemble des chemins de longueur minimale parmi ceux qui sont homotopes à c. Alors il existe un élément de C qui est simple.*

Le corollaire qui suit se déduit du théorème précédent et du corollaire 3.5 :

Corollaire 3.37 *Soit s un système fondamental de lacets qui est de longueur minimale parmi ceux de sa classe d'homotopie. Alors, pour tout i, s_i est un lacet de longueur minimale parmi les lacets simples qui lui sont homotopes.*

À partir d'un système de découpage par graphe, il est toujours possible d'obtenir un système de découpage par graphe *triangulé*, c'est-à-dire un système de découpage par graphe dans lequel chaque face est incidente à au plus trois chemins du système. N augmente mais, asymptotiquement, ne change pas (une triangulation d'un polygone à p côtés se fait avec $p - 3$ chemins). Nous utiliserons ce fait dans l'étude de la complexité de notre algorithme.

3.4.2 Systèmes de découpage par cycles

Théorème 3.38 *Soient g le genre de $\mathcal{M}$ et b le nombre de ses bords. On suppose que $\mathcal{M}$ n'est ni une sphère, ni un disque. Soit $s = (s_1, \dots, s_n)$ un plongement régulier de cycles non contractiles. Il est possible de compléter s en un système de découpage par cycles $(s_1, \dots, s_N)$.*

Ici encore, commençons par un lemme.

Lemme 3.39 *Soit $\mathcal{M}$ une surface compacte, orientable ; soient $k \geqslant 1$ le nombre de ses composantes connexes, g son genre et b le nombre de ses bords. Soit γ un cycle simple dans l'intérieur de $\mathcal{M}$; soit $\mathcal{M}'$ la surface obtenue par découpage de $\mathcal{M}$ le long de γ, ayant k' composantes connexes, b' bords et pour genre g'. Alors l'une des assertions suivantes est vraie :*
- *$k' = k + 1$, $g' = g$ et $b' = b + 2$ (cas d'un cycle séparateur) ;*
- *$k' = k$, $g' = g - 1$ et $b' = b + 2$ (cas d'un cycle non séparateur).*

Démonstration. Soient $\chi(\mathcal{M})$ et $\chi(\mathcal{M}')$ les caractéristiques d'Euler de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$. Un argument semblable à celui de la démonstration du lemme 3.35 montre que $\chi(\mathcal{M}) = \chi(\mathcal{M}')$, car on peut toujours trianguler $\mathcal{M}$ de sorte que le cycle γ soit un cycle de longueur trois dans le graphe sommets-arêtes ; le découpage revient alors à dupliquer trois sommets et trois arêtes (figure 3.12). Donc :

$$2(k' - k) - 2(g' - g) - (b' - b) = 0. \tag{3.2}$$

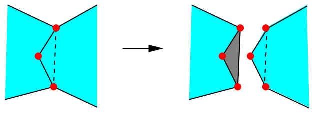


FIG. 3.12 – Un découpage le long d'un cycle simple ne change pas la caractéristique d'Euler de la surface.

À nouveau, $k' - k$ vaut 0 ou 1 ; $b' - b$ vaut nécessairement 2. On en déduit les deux possibilités indiquées. $\square$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.38. Le découpage de $\mathcal{M}$ le long des cycles de s donne un ensemble d'au plus n surfaces, dont la somme des genres est au plus $g + n$ et dont la somme des nombres de bords est au plus $b + n$.

Soit $\mathcal{M}'$ une telle surface ; soient g' son genre et b' le nombre de ses bords. $\mathcal{M}'$ n'est ni une sphère, ni un disque. Si c'est un cylindre ou un tore, elle admet une décomposition en cylindres à 0 ou 1 cycle. Sinon, elle admet une décomposition en pantalons à $3g' + b' - 3$ cycles.

Au total, nous obtenons une décomposition de $\mathcal{M}$ en cylindres ou pantalons avec $O(g+b+n)$ cycles. Pour obtenir un système de découpage par cycles, il suffit alors de « dédoubler » tous les cycles, en créant, pour chaque cycle, une copie qui le longe. $\square$

En particulier, un cycle simple ou une décomposition en pantalons peuvent être complétés en un système de découpage par cycles. On en déduit, avec le théorème 3.7, les corollaires suivants :

Corollaire 3.40 *Soit γ un cycle simple et soit Γ l'ensemble des cycles de longueur minimale parmi ceux qui sont homotopes à γ. Il existe un élément de Γ qui est simple.*

(Ce dernier corollaire a été montré dans [75] dans le cas où les courbes sont tracées sur une surface riemannienne.)

Corollaire 3.41 *Soit s une décomposition en pantalons qui est de longueur minimale parmi celles de sa classe d'homotopie. Alors, pour tout i, s_i est un cycle simple de longueur minimale parmi les cycles qui lui sont homotopes (et non nécessairement simples).*

3.5 Algorithmes

Cette section a pour but d'expliquer comment il est possible de programmer les processus d'optimisation et de complétion décrits précédemment. Nous allons d'abord décrire comment stocker efficacement un plongement régulier de graphe ou de cycles sur $\mathcal{M}$. Ensuite, nous expliquerons comment traduire en algorithmes effectifs les procédés décrits dans la section 3.2. Puis nous donnerons leur complexité. Enfin, nous expliquerons comment compléter un plongement de graphe ou de cycles en un système de découpage.

Convention 3.42 *Nous supposerons dorénavant que :*

i. la surface $\mathcal{M}$ est une surface polyédrale, de graphe sommets-arêtes H ;

ii. G est le dual de H, comme défini dans la section 3.1.2 (ce qui implique en particulier que les faces de G sont des disques topologiques) ;

iii. chaque sommet d'un plongement de graphe considéré est un sommet de H.

3.5.1 Courbes combinatoires

Nous décrivons maintenant en détail le cadre combinatoire, esquissé dans la section 3.1.2. L'idée est de considérer un plongement régulier de graphe ou de cycles et d'« oublier » sa géométrie, en ne gardant en mémoire que la façon dont les courbes croisent les arêtes de G. En d'autres termes, deux plongements qui coupent G de la même façon sont considérées comme étant identiques.

Un *chemin* sur le graphe H est une suite d'arêtes orientées $a_1, \ldots, a_p$ de H telles que pour tout k, $k = 1, \ldots, p-1$, l'arête a_k arrive en le sommet de H duquel part l'arête a_{k+1}. Une occurrence d'une arête orientée de H dans ce chemin sera appelée un *saut* de ce chemin. Un saut *correspond* donc à une unique arête orientée de H, mais une arête orientée de H correspond à zéro, un ou plusieurs sauts d'un chemin.

Un *cycle* sur H est une suite cyclique d'arêtes orientées $a_1, \ldots, a_p, a_{p+1} = a_1$ de H telles que, pour tout k, $k = 1, \ldots, p$, l'arête a_k arrive en le sommet de H duquel part l'arête a_{k+1}. (Cette distinction entre cycle et chemin fermé sur un graphe est à mettre en parallèle avec la distinction entre cycle et chemin fermé sur une surface.) Une occurrence d'une arête orientée de H sera encore appelée un *saut* de ce cycle.

3.5.1.1 Cycles combinatoires

Commençons par la définition d'une famille de cycles combinatoires, qui est le cas le plus simple. Nous allons considérer ici les arêtes *orientées* de H ; si e est une arête de H, $-e$ désigne l'arête e munie de l'orientation contraire.

Une *famille de cycles combinatoires S* est une famille de cycles dans H avec la donnée, pour toute arête orientée e de H, d'un ordre total $\preceq_e$ sur tous les sauts de l'ensemble des cycles qui correspondent à l'arête e ou $-e$. Ces ordres doivent être cohérents, dans le sens suivant : $a \preceq_e b$ si et seulement si $b \preceq_{-e} a$. Ces ordres $\preceq_e$ représentent une façon de tracer les cycles sur la surface : schématiquement, on peut représenter une famille S de cycles combinatoires comme sur la figure 3.13, chaque arête non orientée de H contenant une liste ordonnée de sauts. Dans cette représentation, $a \preceq_e b$ si et seulement si le saut a est à gauche du saut b le long de l'arête (orientée) e.

Soient v un sommet de H et $e_1, \ldots, e_n$ la liste (cyclique) des arêtes de H partant de v, dans le sens horaire. Définissons un ordre cyclique $\preceq_v$ sur les sauts des cycles de S incidents à v, en énumérant ses éléments dans l'ordre : d'abord, les sauts des cycles de S sur e_1 ou $-e_1$, suivant l'ordre $\preceq_{e_1}$; puis les sauts des cycles de S sur e_2 ou $-e_2$, suivant l'ordre $\preceq_{e_2}$; et ainsi de suite. Dans la représentation précédente, $\preceq_v$ décrit l'ordre cyclique des sauts de S autour de v.

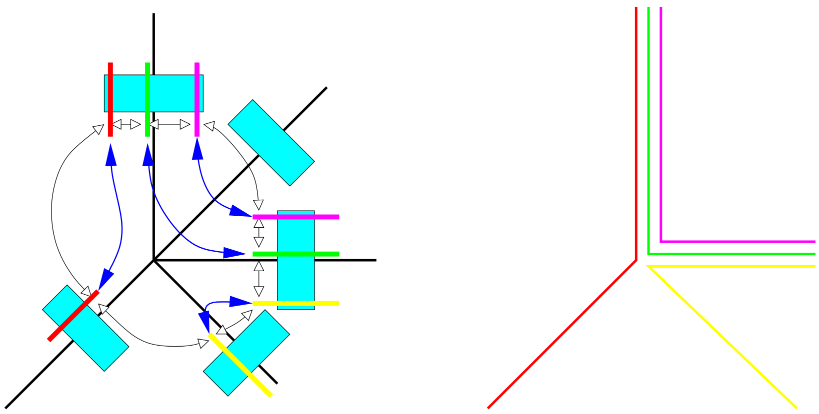


FIG. 3.13 – La structure de données utilisée pour stocker une famille de cycles combinatoires sur H, au voisinage d'un sommet v de H, de degré 5. Chaque arête (non orientée) de H incidente à v contient la liste ordonnée des sauts qui sont sur cette arête. Ici, aucun croisement ne se produit en v. À droite, une façon « naturelle » de voir les cycles écartés sur la surface.

Soient a_1, a_2 et b_1, b_2 les sauts de deux sous-chemins de taille 2 de cycles de S. Nous dirons que ces sous-chemins se *croisent* si les arêtes correspondant à a_1 et b_1 arrivent en un même sommet v et si, dans l'ordre cyclique $\preceq_v$, a_1 et a_2 séparent b_1 et b_2.

Il est facile de créer une structure de données pour stocker une famille de cycles combinatoires, dans laquelle accéder au prédécesseur et au successeur d'un saut dans un cycle donné, et accéder au prédécesseur et au successeur d'un saut par rapport à un ordre $\preceq_v$, prend un temps constant. La figure 3.13 représente cette structure : chaque boîte rectangulaire est une liste à double accès de pointeurs vers les sauts ; chaque saut connaît l'arête sur laquelle il se trouve, ses sauts adjacents dans le cycle, ainsi que ses sauts adjacents dans l'ordre $\preceq_v$.

3.5.1.2 Courbes combinatoires

Nous allons maintenant étendre la définition des cycles combinatoires au cas où il y a, outre des cycles, des *chemins* tracés sur H. Une *famille de courbes combinatoires* S est une famille de courbes (chemins ou cycles) dans H, avec la donnée, pour toute arête orientée e de H, d'un ordre total $\preceq_e$ sur tous les sauts de l'ensemble des courbes qui correspondent à l'arête e ou $-e$. Ces ordres doivent être cohérents, au sens où $a \preceq_e b$ si et seulement si $b \preceq_{-e} a$. Les ordres $\preceq_v$ sont définis en revanche d'une façon un peu différente : la définition de $\preceq_v$ est la même qu'à la section précédente si v n'est pas sur le bord de $\mathcal{M}$; si v est sur le bord de $\mathcal{M}$, $\preceq_v$ est défini comme ci-dessus sauf qu'il y a un élément additionnel, appelé « marque de bord », correspondant à la position du bord, dans cet ordre cyclique.

La définition d'un croisement doit être étendue à cause des extrémités des chemins. Rappelons, d'après la convention 3.42, qu'une face de G ne peut contenir qu'un seul point qui est extrémité d'un ou de plusieurs chemins. Un croisement en un sommet v peut être dû à un croisement défini comme à la section précédente.

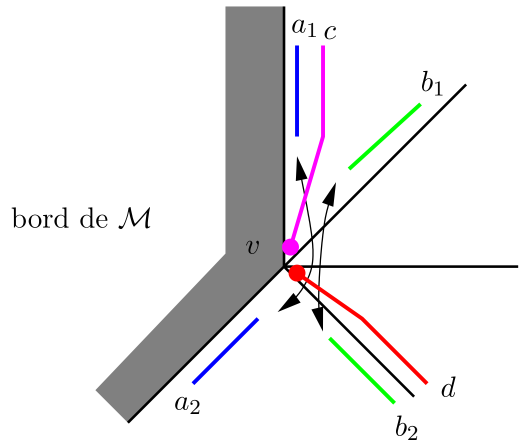


FIG. 3.14 – Croisements en un sommet v de H qui est extrémité d'au moins un chemin. Ici, il y a deux sous-chemins de taille 2 en v, a_1a_2 et b_1b_2, et deux sauts c et d qui sont des extrémités de chemins en v (représentés avec des disques à leurs extrémités). L'ordre cyclique $\preceq_v$ est, dans le sens des aiguilles d'une montre : la marque « bord de $\mathcal{M}$ », a_1, c, b_1, d, b_2, a_2. L'ordre cyclique $\preceq'_v$ est : la marque « bord de $\mathcal{M}$ », c, d. Il y a donc des croisements en v, dûs à la fois à a_1a_2 et b_1b_2 (puisque a_1 et a_2, resp. b_1 et b_2, ne sont pas dans la même classe induite par $\preceq'_v$).

Un autre type possible de croisement est le suivant. Notons $\preceq'_v$ la restriction de l'ordre $\preceq_v$ aux sauts qui sont extrémités de chemins en v ainsi qu'à la marque de bord, si elle existe en v. Cet ordre $\preceq'_v$ partitionne naturellement les autres sauts incidents à v, voir la figure 3.14. Un croisement se produit alors si un sous-chemin de taille 2, a_1a_2, avec a_1 arrivant en v, a ses deux sauts a_1 et a_2 dans des classes différentes de cette partition.

La structure de données utilisée pour stocker une famille de courbes combinatoires est légèrement plus complexe que pour les cycles : on s'impose de stocker également l'ordre $\preceq'_v$. La figure 3.15 représente cette structure dans le cas d'une famille sans croisement.

3.5.1.3 Correspondance entre le cadre topologique et le cadre combinatoire

Soit s un plongement régulier de cycles sur $\mathcal{M}$. Par l'hypothèse de régularité, on peut obtenir, à partir de s, une famille de cycles combinatoires, notée $\rho(s)$, de la façon suivante : l'ordre $\preceq_e$ pour une arête e de H est donné par la liste ordonnée des croisements entre l'arête e^* de G et les cycles de s (voir la figure 3.1, page 66). Cette famille de cycles combinatoires est sans croisement (on dira encore *simple*). Réciproquement, une famille de cycles combinatoires S qui est simple peut être écartée pour obtenir un plongement de cycles dans $\rho^{-1}(S)$. Notons que si $s = (s_1, \dots, s_n)$ et $s' = (s'_1, \dots, s'_n)$ sont dans $\rho^{-1}(S)$, alors, pour tout i, s_i et s'_i sont homotopes en vertu de la condition (ii) de la convention 3.42.

La même propriété est vraie pour les plongements de graphes. Soit s un plongement régulier de graphe ; on peut aussi, à partir de s, obtenir une famille de courbes combinatoires, notée $\rho(s)$, qui est simple, c'est-à-dire sans croisement. La

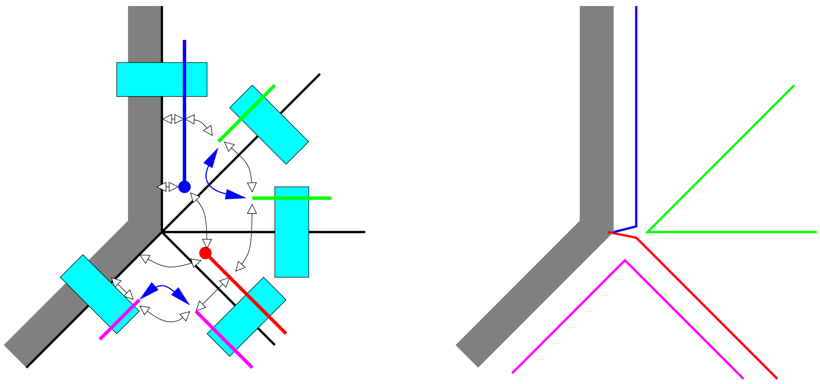


FIG. 3.15 – La structure de données utilisée pour stocker une famille de courbes combinatoires sur H, au voisinage d'un sommet v de H, de degré 5. Ici, aucun croisement n'intervient. À droite, une représentation des courbes écartées sur la surface explique le choix de la définition des croisements.

réciproque est encore vraie.

Un *système de découpage combinatoire* (par graphe ou par cycles) S est une famille de courbes combinatoires simple tel qu'il existe un système de découpage (par graphe ou par cycles) dans $\rho^{-1}(S)$. Il est alors clair que tout élément de $\rho^{-1}(S)$ est un système de découpage. (Rappelons que l'application ρ n'est définie que sur les plongements de graphes ou de cycles.)

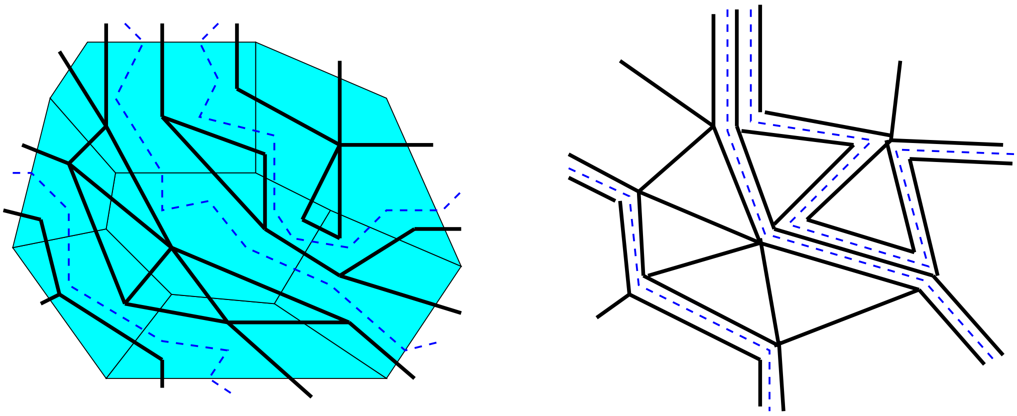
Les deux procédés d'optimisation décrits dans la section 3.2 utilisent des étapes élémentaires de raccourcissement $\mathrm{rac}_i(s)$. En fait, on peut décrire ces opérations de raccourcissement, non seulement sur des systèmes de découpage, mais aussi sur des systèmes de découpage combinatoires : $\rho(\mathrm{rac}_i(s))$ ne dépend que de $\rho(s)$, et pas de s. Cette observation justifie la notion de famille de courbes combinatoires que nous venons de décrire : tous nos calculs peuvent être faits avec cette notion, la géométrie précise des courbes n'apporte aucune information supplémentaire.

3.5.2 Étude algorithmique d'une opération de raccourcissement

Les procédés de la section 3.2 sont fondés sur des étapes de raccourcissement rac_i. Rappelons, d'après la convention 3.42, que G est le dual d'une surface polyédrale $\mathcal{M}$ de graphe sommets-arêtes H. Partant d'un système de découpage combinatoire S, nous allons expliquer comment calculer un autre système de découpage combinatoire S' de sorte que, si $S = \rho(s)$, alors $S' \in \rho(\mathrm{rac}_i(s))$. Nous allons montrer que les opérations rac_i se réduisent à des recherches de plus courts chemins dans un graphe qui représente le graphe sommets-arêtes de $\mathcal{M}$ après « découpage » de $\mathcal{M}$ le long de certaines courbes du système courant. Commençons par décrire ce graphe.

3.5.2.1 Description du graphe $H(S)$

Soit $S = \rho(s)$ une famille de courbes combinatoires simple sur H. Définissons $H(S)$ comme étant le graphe pondéré dont les sommets sont les composantes



A B

FIG. 3.16 – La création du graphe $H(S)$. A : Le graphe $H(S)$, construit à partir des courbes de s. Le graphe G est représenté en traits pleins légers, les courbes de s en traits pointillés et le graphe $H(S)$ en traits gras. B : Le même graphe construit à partir des courbes combinatoires S (rétractées sur le graphe H, non montré ici).

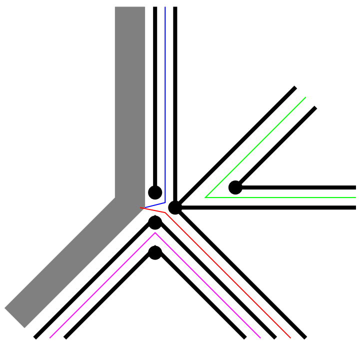


FIG. 3.17 – La création du graphe $H(S)$, en traits gras (suite de la figure 3.15).

connexes de la surface $\mathcal{M} \setminus (s \cup G)$ et dont les arêtes joignent deux sommets séparés par un morceau d'arête e^* de G ; une telle arête ayant alors comme poids le poids de e (figure 3.16A). Intuitivement, $H(S)$ est le graphe sommets-arêtes de la surface $\mathcal{M}$ découpée le long des courbes de S. Il est clair, ici encore, que $H(S)$ ne dépend pas du $s \in \rho^{-1}(S)$; en effet, le graphe $H(S)$ peut être calculé à partir de la donnée de S seulement, de la façon suivante.

Soit e une arête (non orientée) de H. Considérons les k sauts de S correspondant à e ; cela donne $k+1$ intervalles entre ces sauts. Chacun de ces intervalles correspond à une arête de $H(S)$, ayant le même poids que e (figures 3.16B et 3.17). Les extrémités de ces arêtes sont identifiées de la façon suivante : deux extrémités d'arêtes de $H(S)$ sont confondues si elles correspondent à un même sommet v de H et si les intervalles ne sont pas séparés par S (c'est-à-dire que l'insertion d'un chemin de taille deux dans ces deux intervalles n'introduirait aucun croisement en v).

En pratique, il ne sera jamais nécessaire de calculer explicitement le graphe $H(S)$: comme toutes les opérations que nous aurons à faire seront locales, il suffira, étant donné un sommet de $H(S)$ (déterminé par la donnée d'un sommet v de H, d'une arête e de H incidente à v et d'un intervalle entre deux sauts sur e), de pouvoir calculer les voisins de ce sommet. Cela peut se faire en un temps proportionnel à leur nombre.

À chaque chemin (resp. cycle) régulier dans $\mathcal{M} \setminus s$ correspond un chemin (resp. cycle) dans $H(S)$, de même longueur. Réciproquement, à chaque chemin (resp. cycle) dans $H(S)$ correspond un chemin (resp. cycle) régulier dans $\mathcal{M} \setminus s$, et, si le chemin (resp. cycle) de $H(S)$ est simple, le chemin (resp. cycle) correspondant de $\mathcal{M} \setminus s$ peut être choisi simple.

3.5.2.2 Opération de raccourcissement pour les systèmes de découpage par graphe

Soit S un système de découpage par graphe combinatoire sur $\mathcal{M}$; soit $i \in [1, N]$. Calculons le graphe $H(S \setminus S_i)$ (bien sûr, $S \setminus S_i$ désigne S où l'on a retiré la courbe combinatoire S_i). Le chemin S_i correspond alors à un chemin dans ce graphe ; soient a et b ses extrémités. Soit C un plus court chemin entre a et b dans ce graphe. C est bien sûr simple (il passe au plus une fois par chaque sommet de $H(S \setminus S_i)$) ; il définit donc, sans ambiguïté possible, un chemin S'_i inséré dans $S \setminus S_i$, donnant ainsi une nouvelle famille de courbes combinatoires S'.

Cette famille S' est bien dans $\rho(\mathrm{rac}_i(s))$, pour tout $s \in \rho^{-1}(S)$. En effet, si $s'' \in \mathrm{rac}_i(s)$, alors s''_i définit un chemin dans $H(S \setminus S_i)$ entre a et b, donc s''_i est au moins aussi long que S'_i.

3.5.2.3 Opération de raccourcissement pour les systèmes de découpage par cycles

L'optimisation d'un système de découpage par cycles est légèrement plus complexe. Soit s un système de découpage par cycles. D'après la démonstration de la proposition 3.22, calculer un élément de $\mathrm{rac}_i(s)$ peut se faire de la façon suivante. Soit P_i le cylindre ou le pantalon de $s \setminus s_i$ qui contient s_i.

- Si P_i est un cylindre, calculer un plus court chemin q entre les deux bords de ce cylindre. Cela donne un disque topologique D_i, où les points correspondant à des points de q avant découpage vont par paires. Il suffit de considérer tous les plus courts chemins entre ces paires et de prendre le plus court de ces plus courts chemins.
- Si P_i est un pantalon (voir la figure 3.18), l'un des bords de P_i est homotope à s_i. On découpe d'abord P_i le long d'un plus court chemin p entre les deux autres bords de P_i, obtenant ainsi un cylindre C. On calcule ensuite, comme dans le cas précédent, un plus court chemin q entre les deux bords de C, puis tous les plus courts chemins dans le disque topologique ainsi construit entre les paires de points correspondant à un point de q.

Soit S un système de découpage par cycles combinatoires et soit $s \in \rho^{-1}(S)$. D'après les considérations précédentes, le calcul de $S' = \rho(s')$ avec $s' \in \mathrm{rac}_i(s)$ se réduit à des calculs de plus courts chemins dans des surfaces obtenues à partir

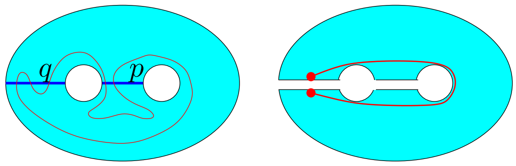


FIG. 3.18 – Une étape élémentaire pour les systèmes de découpage par cycles.

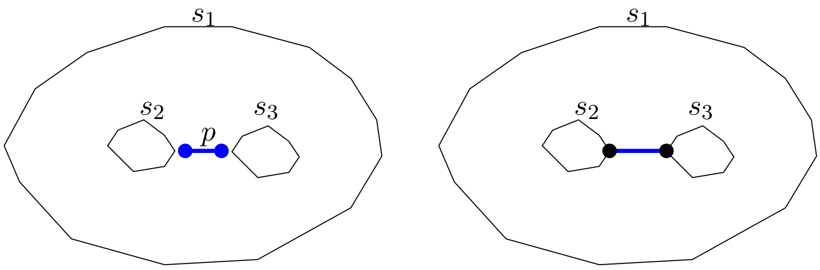


FIG. 3.19 – Modifications locales de la structure de données pour l'étape élémentaire des systèmes de découpage par cycles : on « accroche » le chemin p sur les cycles de P_i, transformant ainsi les cycles s_2 et s_3 en deux chemins fermés.

de $\mathcal{M}$ par découpage le long de certains cycles. Plus précisément, si P_i est par exemple un pantalon :

- Le graphe $H(S \setminus S_i)$ a plusieurs composantes connexes, l'une d'elles, $H_i(S \setminus S_i)$, correspondant à P_i. Certains sommets de ce graphe correspondent aux bords de P_i. On calcule un plus court chemin P entre les deux « bords » de P_i dans $H_i(S \setminus S_i)$ qui ne sont pas homotopes à S_i. Ce chemin est simple et peut donc être ajouté à $S \setminus S_i$ sans ambiguïté.
- On modifie temporairement les cycles de ces bords de P_i ainsi que P pour les transformer en chemins (figure 3.19). Cela permet d'assurer que, lorsqu'on découpe $\mathcal{M}$ le long de $S \setminus S_i$ et P, on obtient un disque topologique (il faut « accrocher » les extrémités de P sur les bords de P_i). La famille combinatoire ainsi obtenue borde donc un cylindre C.
- La même opération est faite avec un chemin Q entre les deux bords de C. On accroche encore Q sur les cycles qui sont sur le bord de C.
- Pour chaque sommet de Q dans $H(P \cup S \setminus S_i)$, correspondant donc à une paire de sommets (a, b) dans $H(P \cup Q \cup S \setminus S_i)$, on calcule un plus court chemin entre a et b. Le plus court de ces plus courts chemins donne, par réidentification de ses extrémités, le cycle S_i' souhaité.

3.5.3 Complexité des algorithmes d'optimisation

Soient K la complexité de $\mathcal{M}$ (nombre total de sommets, arêtes, faces), g son genre et b son nombre de bords. Soit α le rapport entre le plus grand et le plus petit poids des arêtes de G. Soit $S = (S_1, \ldots, S_N)$ un système de découpage combinatoire sur $\mathcal{M}$. Soit d le degré maximal d'un sommet de H.[10]

[10]Notons que l'on peut exprimer la complexité des algorithmes de plusieurs façons, de nombreux paramètres entrant en jeu. On peut dans certains cas se passer du paramètre d dans

Soit R une famille de courbes combinatoires sur $\mathcal{M}$ qui est simple, et soit e une arête de H. La *multiplicité* de R en e est le nombre maximal de sauts de R sur e ou $-e$. La multiplicité de R est le maximum des multiplicités de R, sur toutes les arêtes e de H. En particulier, R a un nombre de sauts majoré par K fois sa multiplicité.

Soit μ le maximum sur i de la multiplicité de S_i. Alors le nombre de sauts d'une courbe au début de l'algorithme est $O(K\mu)$, et, comme la longueur des systèmes de découpage ne peut que décroître, le nombre maximal de sauts d'une courbe au cours de l'algorithme est $O(\alpha K\mu)$.

3.5.3.1 Systèmes de découpage par graphe

Nous considérons ici le cas d'un système de découpage par graphe triangulé S. Le fait de trianguler n'est absolument pas nécessaire pour l'algorithme, mais améliore sa complexité (comme nous le verrons bientôt, on peut trianguler un système de découpage par graphe sans modifier, asymptotiquement, la valeur des paramètres N et μ, et en un temps négligeable devant le temps pris par l'algorithme d'optimisation).

Soit $s \in \rho^{-1}(S)$. Soit t_i un plus court chemin simple isotope à s_i dans $\mathcal{M}$ privé des sommets de s non extrémités de s_i, et aussi court que possible parmi les chemins ayant cette propriété. On peut supposer que chaque sous-chemin maximal de t_i inclus dans une face de G coupe chaque chemin de s au plus $d\mu$ fois ; de plus, le nombre de sauts de $\rho(t_i)$ est $O(\alpha K\mu)$. Donc la longueur du mot des croisements s/t_i est $O(\alpha dK\mu^2N)$. C'est aussi une borne sur le nombre d'étapes rac nécessaires, d'après la démonstration du théorème 3.13. Chaque disque topologique considéré au cours de l'algorithme peut avoir complexité $O(\alpha K\mu)$, car un tel disque est incident à au plus trois chemins du système, ce qui donne la complexité du calcul d'une étape élémentaire rac_i (dominée par le calcul de plus courts chemins, en utilisant l'algorithme de Henzinger *et al.* [93]) : $O(\alpha K\mu)$. (L'utilisation de l'algorithme de Dijkstra, plus simple à programmer, donne un surcoût logarithmique en ces paramètres.) Il y a $O(\alpha dK\mu^2N^2)$ telles étapes, d'où finalement :

> **Théorème 3.43** *Étant donné un système de découpage par graphe combinatoire triangulé $S = (S_1, \ldots, S_N)$*
> – *dont la multiplicité maximale d'une courbe est μ,*
> – *sur une surface polyédrale $\mathcal{M}$, de complexité K, de graphe sommets-arêtes de degré maximal d et dont le rapport des poids extrêmes est α,*
>
> *un système de découpage combinatoire isotope, à sommets fixés, à S et optimal est calculable en temps $O(\alpha^2 dK^2\mu^3N^2)$.*

Ce théorème donne donc une majoration de la complexité du calcul du résultat du théorème 3.2.

le résultat de la complexité, au prix d'une définition plus complexe de la multiplicité et d'un facteur N supplémentaire.

3.5.3.2 Systèmes de découpage par cycles

Le raisonnement est similaire, mais le résultat n'est pas le même. Le nombre d'étapes rac$_i$ nécessaires est toujours $O(\alpha dK\mu^2N^2)$. Lors d'une telle étape, la complexité du cylindre ou du pantalon P_i dans lequel on se trouve est encore $O(\alpha K\mu)$. Il faut calculer $O(\alpha K\mu)$ plus courts chemins sur cette surface, au lieu d'un seul dans le cas précédent. La complexité est donc $O(\alpha K\mu)$ fois la précédente :

Théorème 3.44 *Étant donné un système de découpage par cycles combinatoire* $S = (S_1, \ldots, S_N)$
- *dont la multiplicité maximale d'un cycle est* μ*,*
- *sur une surface polyédrale* $\mathcal{M}$*, de complexité* K*, de graphe sommets-arêtes de degré maximal* d *et dont le rapport des poids extrêmes est* α*,*

un système de découpage combinatoire homotope à S *et optimal est calculable en temps* $O(\alpha^3dK^3\mu^4N^2)$*.*

C'est aussi une majoration de la complexité du calcul du résultat du théorème 3.7. Notons que d, g et b sont majorés par K, et que μ est majoré par la complexité de la famille de chemins en entrée. Les deux algorithmes sont donc polynomiaux en leur entrée et en le paramètre α.

3.5.4 Complétion en un système de découpage

Notre objectif est maintenant d'expliquer comment on peut créer un système de découpage contenant éventuellement un plongement de graphe ou de cycles donné. Les théorèmes précédents montrent que les algorithmes décrits dans la section 3.2 sont polynomiaux en α, d, K, μ et N. Il s'agit donc de compléter le plongement fixé en un système de découpage ayant des valeurs de μ et N aussi petites que possible.

3.5.4.1 Complétion en un système de découpage par graphe

Transformation d'un schéma en un schéma réduit. Considérons d'abord le problème suivant : comment passer d'un schéma polygonal à un schéma polygonal réduit ?

Lemme 3.45 *Soit* H' *un sous-graphe de* H *qui est un schéma polygonal pour* $\mathcal{M}$*. Alors on peut construire un schéma polygonal réduit pour* $\mathcal{M}$ *constitué d'une famille combinatoire de chemins dont les sauts sont sur les arêtes de* H' *et sur les bords de* $\mathcal{M}$*, de sorte que :*
- *chaque chemin du schéma réduit a pour multiplicité au plus* 2 *;*
- *entre toute paire de sommets du polygone correspondant au schéma réduit, il existe un chemin simple à l'intérieur du disque correspondant à ce schéma qui est de multiplicité au plus* 4*.*

Ce calcul se fait en temps $O((g+b)K)$*.*

Démonstration. Ce problème a été considéré par Lazarus *et al.* dans [105, section 5] dans le cas des surfaces sans bord. Leur méthode est la suivante. On

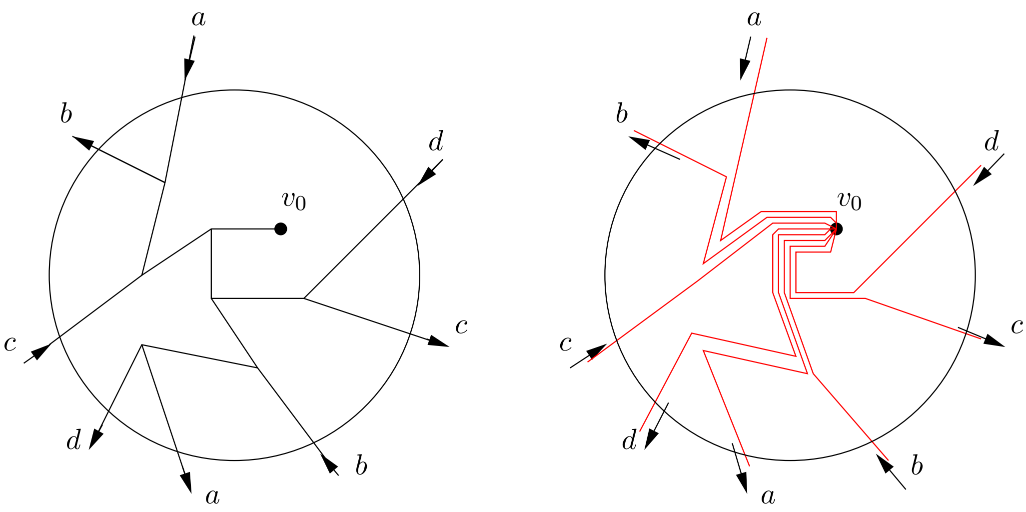


FIG. 3.20 – Transformation d'un schéma polygonal en un schéma polygonal réduit (ici, sur un double-tore). À gauche, les arêtes à l'intérieur du cercle représentent les arêtes de l'arbre couvrant T, et les arêtes a, b, c et d croisant ce disque représentent les arêtes de $H' \setminus T$. À droite, chaque arête de $H' \setminus T$ est prolongée en un chemin allant vers le point-base, ce qui donne naissance à un schéma polygonal réduit dans lequel chaque lacet a multiplicité au plus 2.

calcule un arbre couvrant T de H', enraciné en un point-base v_0 quelconque. H' étant un schéma polygonal pour $\mathcal{M}$, les arêtes de $H' \setminus T$ sont au nombre de $2g$. Pour chacune de ces arêtes $e = a_1a_2$, on crée un lacet de point-base v_0, concaténation de $\gamma_{a_1}^{-1}$, e et γ_{a_2}, où γ_a désigne le plus court chemin de a à v_0 dans T (figure 3.20). Cette construction fournit un schéma polygonal réduit dans lequel chaque lacet a pour multiplicité au plus 2.

Considérons deux sommets du schéma polygonal réduit (figure 3.21, à gauche). On peut montrer (voir [105, section 5]) qu'il existe un chemin simple de multiplicité au plus 4 à l'intérieur du disque délimité par le bord du schéma et qui joint ces deux points. La méthode est la suivante : on choisit de longer un des deux chemins simples du bord du schéma polygonal et qui joint ces deux points (par exemple $a\bar{d}\bar{c}$ dans la figure 3.21, à droite). On longe le bord du schéma polygonal réduit du sommet de départ choisi à l'extrémité initiale de a (cela donne un chemin de multiplicité 1). De l'extrémité terminale de a à l'extrémité initiale de $\bar{c}$, on longe encore le schéma polygonal réduit, mais en court-circuitant les retours au point-base v_0 (voir sur la figure entre $\bar{d}$ et $\bar{c}$), ceci donnant un chemin de multiplicité au plus 2 ; enfin, on rejoint le sommet d'arrivée choisi en longeant le schéma polygonal réduit. Tout ceci donne bien un chemin simple, de multiplicité au plus 4.

En fait, tout ceci s'étend au cas des surfaces à bord. (On choisit ici v_0 sur le bord de $\mathcal{M}$, car ce sera le cas plus loin.) On calcule encore un arbre couvrant de H'. Les arêtes de $H' \setminus T$ sont toujours au nombre de $2g$; pour ces arêtes, on crée un lacet de point-base v_0, comme précédemment. Ces $2g$ lacets donnent un schéma polygonal réduit pour la surface $\mathcal{M}$ où l'on a bouché les bords par des

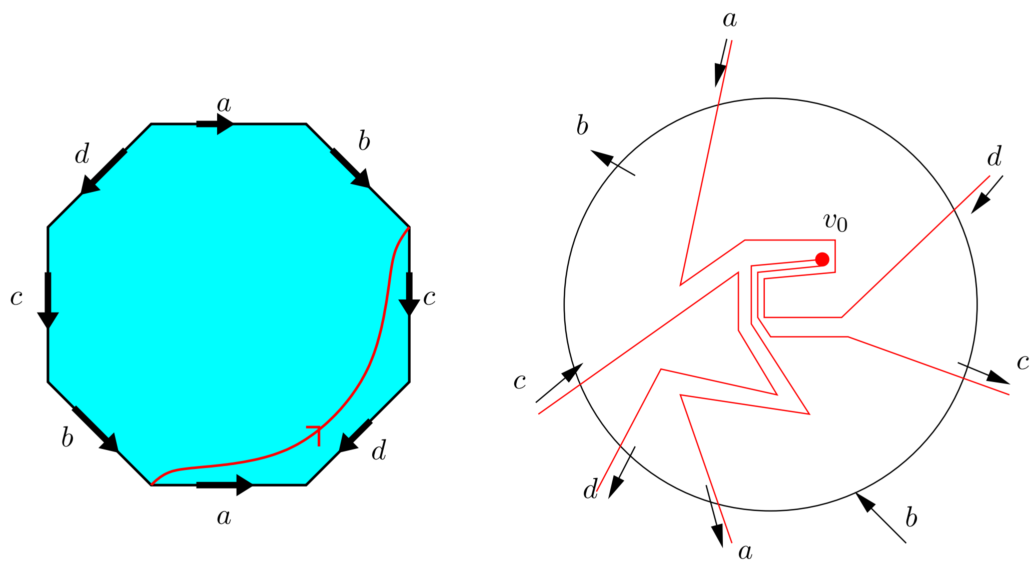


FIG. 3.21 – Entre toute paire de sommets du schéma réduit, il existe un chemin à l'intérieur du disque qui a multiplicité au plus 4. Ce chemin est obtenu en longeant le bord du schéma polygonal réduit et en court-circuitant les retours au point-base.

disques topologiques. Il reste, pour chaque bord de $\mathcal{M}$ différent du bord incident à v_0, à introduire dans la famille de courbes combinatoire le plus court chemin dans T entre ce bord et v_0. On obtient encore que chaque lacet a pour multiplicité au plus 2. Le même argument que précédemment s'applique pour montrer la seconde partie du lemme. $\square$

Un premier cas. Soit $S = (S_1, \ldots, S_n)$ une famille simple de chemins combinatoires. Supposons dans un premier temps que par tout sommet de H passe au plus un sous-chemin de taille 2 d'un chemin de S. Le découpage de $\mathcal{M}$ le long de S se fait naturellement en supprimant les adjacences entre faces de H le long des arêtes de H qui contiennent un saut d'un chemin de S.

D'après le théorème 3.34, il est possible de compléter S en un système de découpage par graphe $(S_1, \ldots, S_N)$ dont chaque sommet est un sommet de S ou un point du bord de $\mathcal{M}$, avec $N = O(n + g + b)$: ce problème se ramène à celui de calculer un schéma polygonal pour chaque composante connexe $\mathcal{M}'$ de la surface obtenue à partir de $\mathcal{M}$ par découpage le long des chemins de S. On peut pour cela considérer le graphe sommets-arêtes de $\mathcal{M}'$, auquel on retire les arêtes incidentes au bord de $\mathcal{M}'$; on considère un sous-graphe maximal H' de ce graphe, de sorte que son complémentaire est connexe (c'est alors un disque topologique). H' est alors un schéma polygonal pour $\mathcal{M}'$, donc connexe, constitué de $2g'$ cycles indépendants et b' arêtes dont un sommet incident est sur le bord de $\mathcal{M}'$ (si $\mathcal{M}'$ a pour genre g' et pour nombre de bords b'). On applique alors le lemme 3.45.

Enfin, il se peut que des chemins arrivent en un sommet v sur le bord de $\mathcal{M}'$ qui n'est pas, après recollement, un sommet de S ou un sommet sur le bord de $\mathcal{M}$; mais, dans ce cas, il existe un sommet v' sur le même bord de $\mathcal{M}'$ qui satisfait cette propriété, et l'on peut prolonger tous les chemins arrivant en v vers v'. Les propriétés du lemme 3.45 sont toujours satisfaites. On peut alors trianguler le schéma polygonal, en choisissant un sommet v_0 du schéma et en créant, si le schéma est à p côtés, un chemin de v_0 vers chacun des $p-3$ sommets du schéma qui ne sont pas incidents à v_0 et distincts de v_0 : le fait que chaque sous-chemin du schéma polygonal ait un chemin ayant les mêmes extrémités et de multiplicité au plus 4 montre que l'on peut choisir la multiplicité de chacun de ces chemins comme étant au plus 4. Finalement, en ajoutant à S tous ces schémas polygonaux triangulés et en dédoublant chaque chemin, on obtient un système de découpage triangulé, avec $O(n+g+b)$ chemins d'après le théorème 3.34, chacun de multiplicité au plus 4.

Cas général. Soit μ la multiplicité de S. La méthode générale est analogue à celle que nous venons de décrire. La seule difficulté consiste à voir que toutes les opérations précédentes peuvent se faire avec des familles de courbes combinatoires : dans ce qui précède, nous avons découpé $\mathcal{M}$ le long des chemins de S, mais ce n'est en fait pas nécessaire. Nous allons en fait *mimer* le découpage de $\mathcal{M}$ le long de S, sans procéder effectivement au découpage. Une autre possibilité serait de subdiviser la surface le long d'un élément $s \in \rho^{-1}(S)$ calculé explicitement.

La première étape a consisté à trouver des disques topologiques sur $\mathcal{M} \setminus S$ de sorte que le complémentaire de ces disques ne contienne aucune face de $\mathcal{M}$. L'idée est maintenant la même, sauf qu'il faut tenir compte des interstices entre sauts de S le long d'une même arête de H, qui créent des faces (infiniment fines). Nous allons en fait, partant de S, ajouter à cette famille de courbes combinatoires des cycles, chacun de ces cycles bordant un disque topologique. D'un point de vue algorithmique, nous maintenons donc, à chaque instant, une famille de courbes combinatoires simple constituée de S et des cycles C_i.

Appelons *faces* de $\mathcal{M} \setminus S$ la réunion des faces de H ainsi que, pour chaque arête (non orientée) e de H contenant $p \geqslant 2$ sauts de S, des $p-1$ interstices entre ces sauts. Ces faces sont reliées par des relations d'adjacences évidentes :

- deux interstices sont adjacents si l'on peut insérer un chemin de taille 2 dans ces deux interstices, tel que ce chemin ne coupe pas S ;
- une face de H est adjacente à un interstice s'il y a un sommet v de H tel que l'on peut insérer un chemin de taille 2 passant par v, sans introduire de croisement, tel qu'un saut est dans l'interstice et l'autre longeant la face de H ;
- deux faces de H sont adjacentes si elles sont incidentes, dans H, à une même arête e qui ne contient aucun chemin de S, ou à un même sommet v tel que l'on peut, sans créer de croisement, insérer dans S un chemin de taille 2 longeant les deux faces.

Ajoutons à S un cycle C_1 qui borde une face de $\mathcal{M} \setminus S$. Tant que c'est possible, étendons C_1 en augmentant l'intérieur de C_1 avec une face de $\mathcal{M} \setminus S$ adjacente, en maintenant le fait que C_1 borde un disque topologique (les faces de $\mathcal{M} \setminus S$ ne changent pas par cette opération). Ensuite, si certaines faces de $\mathcal{M} \setminus S$ n'ont pas été visitées, on crée un deuxième cycle C_2 autour de cette face, que l'on fait grossir de la même façon ; et ainsi de suite. On obtient ainsi une famille de courbes combinatoires simple, que l'on notera (improprement) $S \cup C$.

Une autre façon de voir ce processus est de calculer une forêt couvrante du graphe des faces de $\mathcal{M} \setminus S$ (défini par les relations d'adjacence ci-dessus) et, pour chaque arbre de la forêt, de créer un cycle C_i qui contient cet arbre dans le disque topologique qu'il borde. Mais en fait, algorithmiquement, il est plus simple de procéder aux deux étapes simultanément : pendant la création de la forêt couvrante, on maintient le « bord » de la forêt courante à l'aide de ces cycles.

Chaque composante connexe $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M} \setminus S$ contient donc un cycle de C, qui borde un disque topologique. La partie entre ce cycle et S découpe donc $\mathcal{M}'$ en un disque topologique : si l'on considère la composante connexe du graphe $H(S \cup C)$ comprise dans $\mathcal{M}'$ à l'extérieur du cycle de C qu'elle contient et que l'on retire les arêtes de ce graphe qui longent un bord de $\mathcal{M}'$, on obtient un schéma polygonal pour $\mathcal{M}'$. On procède ensuite de la même façon que dans le cas particulier présenté plus haut pour obtenir un schéma réduit de $\mathcal{M}'$ dont chaque sommet est soit sur le bord de $\mathcal{M}$, soit un sommet de S, à $2g' + b' - 1$ chemins (où g' et b' sont le genre et le nombre de bords de $\mathcal{M}'$; si $b' = 0$, il y a $2g'$ chemins). La multiplicité de chacun de ces chemins est majorée par $4\mu + 4$: en effet, chaque chemin passe au plus deux fois par chaque arête de $H(S \cup C)$ et chaque arête de H peut correspondre à au plus $2\mu + 2$ arêtes de $H(S \cup C)$. On étend ceci à un système de découpage par graphe triangulé ; la multiplicité de chaque chemin du système résultant est au plus $8\mu + 8$.

Toutes ces opérations ont une complexité moindre que celle de l'optimisation du système de découpage. D'où finalement, avec le théorème 3.43 :

Théorème 3.46 *Étant donnée une famille simple de chemins combinatoires $S = (S_1, \dots, S_n)$, ne contenant aucun chemin contractile,*
- *dont la multiplicité est μ,*
- *sur une surface polyédrale $\mathcal{M}$, de complexité K, de graphe sommets-arêtes de degré maximal d et dont le rapport des poids extrêmes est α,*

on peut calculer une famille simple de chemins combinatoires $S' = (S'_1, \dots, S'_n)$ telle que, pour tout i, S'_i est isotope à S_i dans $\mathcal{M}$ privé des sommets de S non extrémités de S_i et aussi court que possible parmi les courbes satisfaisant cette propriété. Ce calcul peut se faire en temps $O(\alpha^2 d K^2 \mu^3 (n + g + b)^2)$.

Cet algorithme est donc aussi polynomial en son entrée et en le paramètre α.

Il nous faut ici préciser la subtilité suivante. Étant donnée une famille simple de chemins combinatoires S, l'expression « S_i est isotope dans $\mathcal{M}$ privé de certains sommets » n'a de sens que si ces sommets sont soit sur le bord de $\mathcal{M}$, soit des extrémités de certains chemins de S. En effet, imaginons que S_i longe une arête incidente à un sommet v de H et que v soit intérieur à $\mathcal{M}$ et non extrémité de chemins dans S. Alors la classe d'isotopie de S_i dans $\mathcal{M}$ privé de v n'est pas déterminée : on ne peut pas savoir si S_i laisse v à sa gauche ou à sa droite quand S_i parcourt l'arête e (figure 3.22A et B). Cette ambiguïté est levée si v est (par exemple) extrémité d'un chemin S_j, sachant que la famille de chemins combinatoires S est simple (figure 3.22C). Ainsi l'expression « S'_i est isotope à S_i dans $\mathcal{M}$ privé des sommets de S non extrémités de S_i » a un sens seulement parce que la famille combinatoire S' (et pas seulement S'_i) est connue.

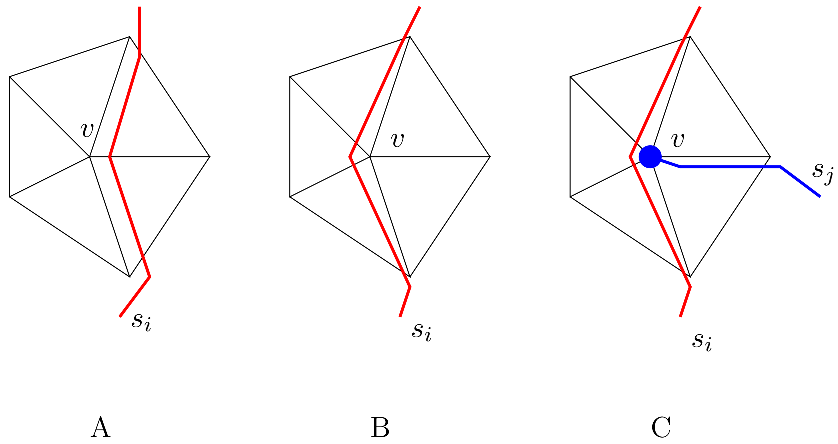


FIG. 3.22 – A et B : Les deux chemins s_i tracés sur la surface correspondent à la même courbe combinatoire et ne sont pourtant pas isotopes dans $\mathcal{M}$ privé de v. C : Cette ambiguïté est levée si un chemin s_j a une extrémité en v.

3.5.4.2 Complétion en un système de découpage par cycles

Soit $\mathcal{M}$ une surface qui n'est ni une sphère, ni un disque. Le graphe sommets-arêtes de $\mathcal{M}$ est toujours noté H. Soit $S = (S_1, \dots, S_n)$ une famille de cycles combinatoires simple, dont les cycles ne sont pas contractiles. Si $\mathcal{M}$ est sans bord et $n = 0$, on insère d'abord dans S un cycle essentiel de $\mathcal{M}$ qui est un cycle simple dans H, suivant l'article d'Erickson et Har-Peled [68, section 5]. Soit $\mu \geqslant 1$ la multiplicité de S. Nous allons expliquer comment étendre S en un système de découpage par cycles $(S_1, \dots, S_N)$, de sorte que la multiplicité d'un cycle soit au plus $4\mu + 2$. En fait, il nous suffit de savoir compléter S en une décomposition de $\mathcal{M}$ en cylindres et pantalons, puisque, ceci fait, il n'y a plus qu'à dédoubler chaque cycle de S. Nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme 3.47 *Soit $\mu \geqslant 1$ et soit S une famille simple de cycles combinatoires sur $\mathcal{M}$, contenant au moins un cycle, telle que, pour chaque composante connexe $\mathcal{M}'$ de la surface $\mathcal{M}$ découpée le long de S et pour toute arête e de $\mathcal{M}$:*

1. *si $\mathcal{M}'$ est un pantalon, l'arête e se retrouve au plus $4\mu + 2$ fois sur le bord de $\mathcal{M}'$;*
2. *si $\mathcal{M}'$ n'est pas un pantalon, l'arête e se retrouve au plus $2\mu + 1$ fois sur le bord de $\mathcal{M}'$.*

Alors on peut compléter S en une famille S', satisfaisant aussi les conditions de ce lemme, telle que S' est une décomposition de $\mathcal{M}$ en cylindres et pantalons.

La famille S satisfait de façon évidente les hypothèses de ce lemme ; on obtient en particulier que S' est une décomposition en cylindres et pantalons dont chaque cycle a multiplicité au plus $4\mu + 2$.

DÉMONSTRATION. Supposons que S ne soit pas une décomposition de $\mathcal{M}$ en cylindres et pantalons. Nous allons ajouter à S un ou deux cycles, obtenant ainsi

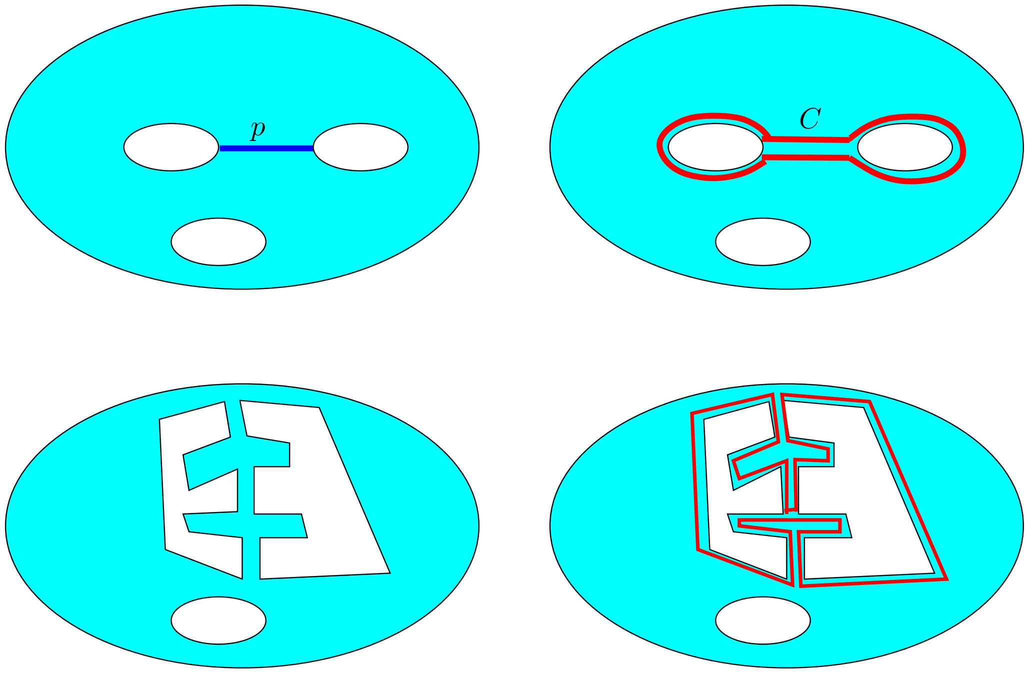


FIG. 3.23 – En haut, découpage de $\mathcal{M}'$ à l'aide d'un chemin p joignant deux bords de $\mathcal{M}'$. En bas, deux bords se longent à plusieurs reprises en partageant plusieurs arêtes : le chemin p est réduit à un sommet.

une famille S' satisfaisant toujours les hypothèses du lemme, qui décompose $\mathcal{M}$ en une union disjointe de surfaces topologiquement plus simples. Le résultat du lemme s'en déduira par récurrence.

Premier cas. Supposons d'abord qu'il existe une composante connexe $\mathcal{M}'$ de la surface $\mathcal{M}$ découpée le long de S de sorte que son nombre de bords b' et son genre g' satisfassent $b' \geqslant 4$ et/ou ($g' \geqslant 1$ et $b' \geqslant 2$). Nous allons ajouter à S un cycle « regroupant » deux des bords de $\mathcal{M}'$: le nouveau cycle décomposera donc $\mathcal{M}'$ en un pantalon et une surface à $b' - 1$ bords et de genre g' (figure 3.23). Souvenons-nous toutefois que $\mathcal{M}'$ n'est pas nécessairement une surface polyédrale : plusieurs cycles de S peuvent se longer, d'où la possibilité d'avoir des faces infiniment fines.

On calcule un chemin p dans $H(S)$, possiblement réduit à un seul sommet, qui joint, dans $\mathcal{M}'$, deux bords distincts de $\mathcal{M}'$, de sorte que chaque arête de H longée par le chemin p ne corresponde à aucune arête d'un cycle déjà existant dans S, ni ne soit sur le bord de $\mathcal{M}$ (il suffit pour cela de calculer un plus court chemin dans $H(S)$ entre un bord quelconque de $\mathcal{M}'$ et l'union de ses autres bords). Ensuite, on « fusionne » les deux bords de $\mathcal{M}'$ qui sont sur les extrémités de p à l'aide du cycle C créé par ce chemin p et faisant le tour des deux bords. Ajoutant C à S, on obtient une famille S' qui satisfait les hypothèses du lemme. En effet, chaque arête de $\mathcal{M}$ correspondant à une arête de p est parcourue deux fois exactement par C ; une telle arête ne correspond alors à aucun autre bord de la surface obtenue par découpage de $\mathcal{M}$ le long de S, d'après la définition de p. C sépare $\mathcal{M}'$ en deux composantes connexes :

- un pantalon, dont le bord est constitué des arêtes de $\mathcal{M}$ suivantes : deux fois chaque arête de $\mathcal{M}$ correspondant à une arête du chemin p, d'une part ; d'autre part, chacun des deux bords fusionnés, avec une multiplicité au plus double de celle des bords de la surface $\mathcal{M}'$, soit au plus $4\mu + 2$. Donc la propriété 1 est bien satisfaite dans ce pantalon ;
- le complémentaire de ce pantalon, qui a pour bords (en termes d'arêtes de $\mathcal{M}$) l'ensemble des bords de $\mathcal{M}'$ ainsi que deux fois le chemin p. La propriété 2 est donc vérifiée dans cette surface.

Second cas. Une composante connexe $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ découpée le long des cycles de S est à exactement un bord et de genre non nul (si une telle composante n'existait pas, $\mathcal{M}'$ n'aurait pas de bord, ce qui est impossible, ou S serait une décomposition en cylindres et pantalons). En adaptant [68, section 5] et en utilisant la méthode d'évolution d'un cycle bordant un disque topologique (comme dans la section 3.5.4.1), on peut calculer un cycle essentiel C dans $H(S)$ qui est simple dans $H(S)$ et qui, de plus, longe le bord de $\mathcal{M}'$ au sens suivant : C est la concaténation de deux chemins p et q dans $H(S)$; p longe le bord de $\mathcal{M}'$; les arêtes de q, vues comme des arêtes de H, sont des arêtes ne contenant aucun saut de S et non situées sur le bord de $\mathcal{M}$. (Bien sûr, un des deux chemins p et q peut être réduit à un seul sommet.)

On ajoute C à S. Après cette opération, les hypothèses du lemme ne sont pas nécessairement vérifiées car les arêtes de $\mathcal{M}$ correspondant à p se retrouvent avec une multiplicité plus grande dans la surface obtenue (figure 3.24A, B et C). Mais on peut remédier facilement à ce problème en entourant les deux bords incidents à p par un nouveau cycle C' (figure 3.24D) : ce cycle sépare la surface en un pantalon, dont le bord a multiplicité au plus $4\mu + 2$ sur $\mathcal{M}$ (comme dans le premier cas), et en une surface dont le bord est constitué de q et de la portion du bord initial de $\mathcal{M}'$ qui ne longe pas p, donc de multiplicité au plus $2\mu + 1$. La famille S à laquelle on a ajouté C et C' satisfait donc les hypothèses du lemme. □

Nous avons donc créé une décomposition en cylindres et pantalons de la surface $\mathcal{M}$, chacun des cycles ayant multiplicité au plus $4\mu + 2$. On vérifie, de la même façon qu'à la section 3.4, que le nombre de cycles N total est en $O(n + g + b)$. Finalement, en utilisant ce résultat et le théorème 3.44 :

Théorème 3.48 *Soit $\mathcal{M}$ une surface qui n'est ni une sphère, ni un disque. Étant donnée une famille simple de cycles combinatoires $S = (S_1, \ldots, S_n)$, ne contenant aucun cycle contractile,*
- *dont la multiplicité est μ,*
- *sur une surface polyédrale $\mathcal{M}$, de complexité K, de graphe sommets-arêtes de degré maximal d et dont le rapport des poids extrêmes est α,*

on peut calculer une famille simple de cycles combinatoires $S' = (S'_1, \ldots, S'_n)$ telle que, pour tout i, S'_i est homotope à S_i et aussi court que possible parmi tous les cycles (non nécessairement simples) homotopes à S_i. Ce calcul peut se faire en temps $O(\alpha^3 d K^3 \mu^4 (n + g + b)^2)$.

L'algorithme est encore polynomial en son entrée et en α.

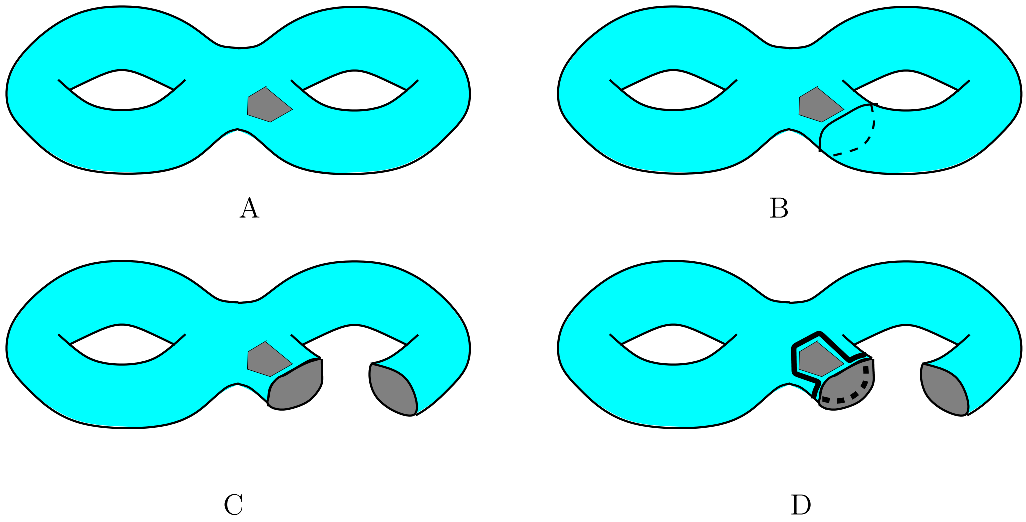


FIG. 3.24 – Découpage de $\mathcal{M}'$ le long d'un cycle essentiel. A : un double-tore à un bord. B : Création d'un cycle essentiel (ici, non séparateur) adjacent au bord. C : Découpage de la surface le long de ce cycle. D : Création d'un nouveau cycle entourant les deux bords adjacents.

Conclusion

Programmation

Nous avons présenté des procédés pour optimiser un plongement de graphe et des cycles simples et deux à deux disjoints sur une surface. Un prototype a été programmé pour l'optimisation d'un système fondamental de lacets sur le graphe sommets-arêtes d'une surface triangulée sans bord plongée dans $\mathbf{R}^3$, le poids d'une arête étant égal à sa longueur euclidienne. L'algorithme programmé correspond à la première variante mentionnée dans la section 3.2.3. La programmation a été faite en utilisant la structure de données des polyèdres de la librairie C++ de géométrie algorithmique CGAL[11]. Une fois le système de lacets optimal obtenu, un lissage des courbes par optimisation locale est fait, ce qui permet d'obtenir des chemins s'approchant de chemins géodésiques sur la surface elle-même : dans l'étoile de chaque sommet de la surface, on remplace chaque morceau de lacet par un plus court chemin dans cette étoile ; cette opération est répétée jusqu'à ce que le raccourcissement en une étape soit au-dessous d'un seuil donné. Cela ne modifie bien sûr pas la classe d'homotopie des lacets. La figure 3.25 présente un exemple de résultat obtenu sur un double-tore à 1 536 faces. Il serait souhaitable de disposer d'un code complet et robuste de ces algorithmes (par exemple en utilisant CGAL), pour vérifier leur pertinence dans les applications et expérimenter des extensions possibles. Les algorithmes étant purement combinatoires, leur programmation ne présente pas de difficultés majeures. En particulier, les problèmes de dégénérescence, usuels dans les algorithmes de géométrie, ne se posent pas ici : des imprécisions numériques peuvent donner des résultats imprécis, mais pas des

[11] `http://www.cgal.org`

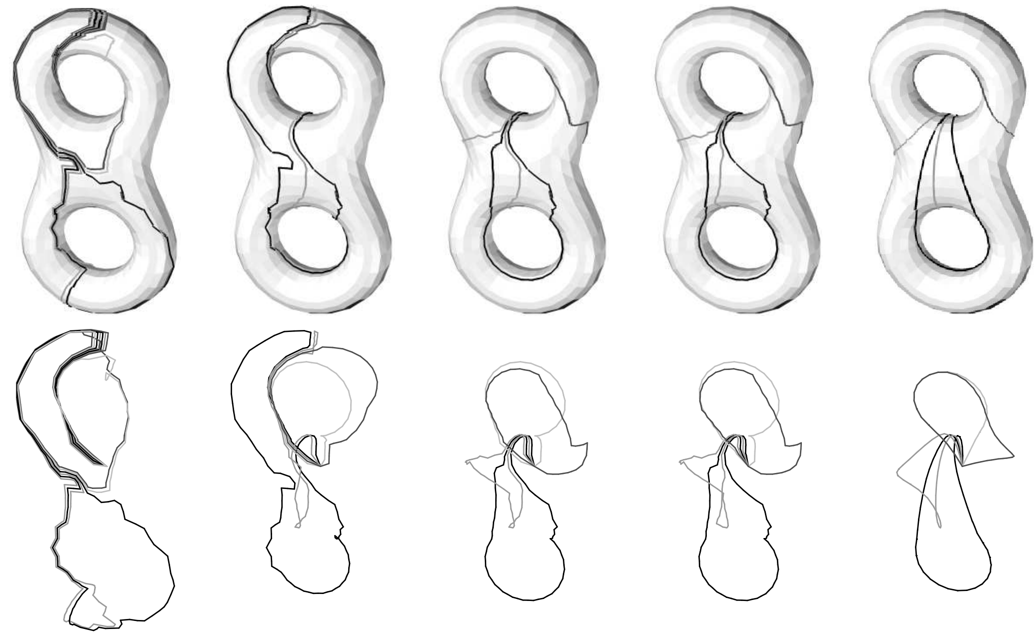


Fig. 3.25 – A : Un système fondamental de lacets canonique s, obtenu par l'algorithme de [105]. Le point-base se trouve derrière. B : Un élément de rac(s) (ici, rac désigne l'optimisation par la première variante de la section 3.2.3). C : Un élément de $\text{rac}^2(s)$. D : Un élément de $\text{rac}^3(s)$, qui a même longueur que l'élément de $\text{rac}^4(s)$ calculé, est un système optimal. E : Le système obtenu à partir d'un élément de $\text{rac}^4(s)$ par optimisation locale des courbes sur la surface (4 000 itérations ont été nécessaires pour ce lissage).

résultats incohérents (les courbes calculées sont toujours simples et gardent leurs propriétés topologiques).

Étude de la complexité

Nos algorithmes sont polynomiaux en la complexité de la surface et du système d'entrée et en le paramètre α, rapport des poids extrêmes des arêtes de G. Il serait souhaitable de se débarrasser de ce paramètre : au sens strict du terme, les algorithmes ne sont pas polynomiaux en la taille de l'entrée à cause de sa présence. Malheureusement, peut-être est-il inévitable : il constitue le lien entre la complexité « géométrique » (longueur d'une courbe) et la complexité « combinatoire » (en termes de nombre d'arêtes du chemin dans le graphe sommets-arêtes). Quoi qu'il en soit, l'importance de ce paramètre est à éclaircir. De façon plus générale, les bornes que nous donnons sur la complexité de nos algorithmes ne sont probablement pas optimales : on peut chercher à les améliorer.

Autres notions de longueur

Les algorithmes que nous avons développés fonctionnent sur le graphe sommets-arêtes d'une surface polyédrale ; ce cadre peut sembler assez restrictif comparé à de possibles résultats plus géométriques sur des surfaces polyédrales ou riemanniennes. Néanmoins, un tel cadre est pertinent dans certains contextes (au moins dans le but de créer un paramétrage pour remailler une surface, comme nous le soulignons dans [2]) : étant donnée une surface polyédrale, il peut être souhaitable, dans certains cas, de ne calculer que des chemins dans son graphe sommets-arêtes. Un autre intérêt possible de notre cadre pourrait être l'optimisation approchée de courbes sur une surface polyédrale : certains algorithmes, comme [104], procèdent par raffinement du graphe sommets-arêtes de la surface en échantillonnant les arêtes selon un schéma bien particulier. Le cadre que nous avons introduit permet sans doute, avec des modifications mineures, d'optimiser de façon approchée des courbes en garantissant la qualité de l'approximation, et ce de façon relativement aisée.

Il est souhaitable d'étendre ces résultats au cas de courbes tracées sur une surface polyédrale constituée de polygones isométriques à des polygones euclidiens, en tenant compte de la longueur euclidienne des courbes. Les algorithmes de la section 3.2 peuvent être décrits dans ce cadre, avec quelques modifications : il faut autoriser les courbes d'un système de découpage à se chevaucher sur la surface, mais non à se croiser. L'étape de raccourcissement revient alors à calculer des plus courts chemins sur une surface polyédrale, et les algorithmes de [116] ou [31] satisfont cet objectif. Nous conjecturons que les théorèmes d'optimalité s'étendent à cette situation ; les techniques que nous avons employées semblent se généraliser au cas des courbes tracées sur la surface, mais des difficultés résident dans l'extension des notions de systèmes de découpage et de mots des croisements (les courbes d'un système de découpage pouvant se longer, il faut être capable, pour définir le mot des croisements, de définir un ordre sur les morceaux de courbes se chevauchant). D'autre part, donner la complexité des algorithmes dans ce cadre semble difficile. Le travail que nous avons présenté, à la fois par ses algorithmes et ses techniques de démonstrations, pourrait donc servir de point de départ à une telle extension.

Il serait intéressant de généraliser ce travail au cas des courbes *quelconques* tracées sur une surface riemannienne. Mais, outre les difficultés que nous venons d'évoquer, notre procédé utilise de façon cruciale le fait que le système de découpage initial et une plus courte courbe d'une classe d'homotopie donnée se coupent un nombre fini de fois. Cela peut ne pas être le cas dans certains cas pathologiques sur une surface riemannienne (penser à un système fondamental de lacets qui fait un nombre infini de tours en spirale autour de son point-base). Néanmoins, pour la démonstration de l'optimalité, un point qui simplifie les choses par rapport au cas polyédral est que, sur une surface riemannienne, deux géodésiques maximales qui sont tangentes en un point sont égales : en ce sens, le cas polyédral est plus problématique, puisque deux géodésiques peuvent se longer un certain temps puis s'écarter. Nous conjecturons par exemple que chaque lacet d'un système fondamental de lacets optimal sur une surface riemannienne est aussi court que possible parmi les lacets simples de sa classe d'homotopie.

Il paraît aussi naturel de chercher des extensions de nos résultats aux surfaces non orientables. Des obstacles surviennent toutefois dans ce cas. D'abord, notre définition du mot des croisements utilise de façon cruciale l'orientabilité de la surface. Peut-être est-il néanmoins suffisant de considérer une version affaiblie du mot des croisements où l'orientation des croisements ne serait pas indiquée, et en définissant une réduction élémentaire comme une suppression de deux lettres identiques consécutives. D'autre part, le théorème 1.7, que nous utilisons pour l'optimalité d'un système fondamental de lacets, ne s'étend pas tel quel aux surfaces non orientables. Enfin, il faudrait généraliser la notion de système de découpage par cycles au cas des surfaces non orientables.

Optimisation sans fixer la classe d'homotopie ou d'isotopie

Des prolongements de nos travaux sont possibles en restant dans le cadre que nous avons choisi, c'est-à-dire quand les courbes sont tracées dans le graphe sommets-arêtes de la surface polyédrale. Déjà, nous ne sommes pas capables de calculer un plus court chemin simple homotope à un chemin simple donné (sauf pour les lacets ou les chemins à extrémités sur le bord de la surface). Dans ce but, on pourrait chercher à comprendre si d'autres obstructions que celles du contre-exemple de Feustel (figure 1.18, page 29) peuvent se produire.

Toujours dans ce cadre, nous avons décrit un moyen de calculer un système fondamental de lacets aussi court que possible dans une classe d'homotopie donnée. Mais cela ne donne pas de méthode pour calculer le plus court système fondamental de lacets (parmi toutes les classes d'homotopie possibles). Une question ouverte est de déterminer la complexité de ce problème. Erickson et Har-Peled ont montré qu'il est NP-difficile de déterminer un plus court schéma polygonal (même dans le cas où les poids des arêtes sont égaux à un) et nous avons montré que le calcul d'un plus court système fondamental de lacets d'une classe d'homotopie donnée est un problème polynomial (avec des poids unitaires). Le problème que nous posons maintenant est intermédiaire entre ces deux problèmes.

Imaginons pour simplifier que nous ne considérions que des systèmes ayant même point-base. Les transformations de Brahana donnent un moyen élémentaire pour passer d'une classe de systèmes fondamentaux à une autre ; on peut donc voir l'ensemble des classes d'homotopie de systèmes comme les sommets d'un graphe dont les arêtes sont les transformations de Brahana. L'étude de ce graphe pourrait fournir des indications quant à la manière de trouver le plus court système fondamental de lacets : est-il suffisant de procéder par transformations de Brahana successives qui diminuent la longueur du système fondamental de lacets optimal dans cette classe d'homotopie ?

De même, quelle est la complexité du calcul de la plus courte décomposition en pantalons d'une surface ? Un algorithme glouton pour calculer une décomposition en pantalons d'une surface est de découper itérativement la surface le long d'un plus court cycle essentiel ; est-ce que cette méthode donne la décomposition en pantalons la plus courte qui soit ? Nous pensons que ces questions sont importantes, car cela permettrait de fournir des décompositions de la surface qui soient aussi canoniques que possible. De plus, il est intéressant dans les applications en informatique graphique de décomposer une surface à l'aide de courbes aussi courtes que possible, indépendamment de la classe d'homotopie.

Dans la même veine, on pourrait chercher le plus court plongement d'un graphe donné sur une surface donnée. Nous avons montré comment calculer le plus court plongement d'un graphe d'une classe d'isotopie à sommets fixés. Une généralisation reste à trouver.

Optimisation de courbes non simples

Nous n'avons cherché à optimiser que des courbes simples. Comment, étant donnée une courbe non simple, trouver la plus courte courbe homotope ? Dans le cas des surfaces (orientables) à au moins un bord, nous pouvons donner une esquisse de méthode pour cela. L'idée est, à l'aide de notre algorithme, de calculer un système de découpage par chemins optimal s (dans une classe d'homotopie quelconque) sur cette surface. Soit maintenant un chemin c sur cette surface et soit s/c le mot des croisements de ce chemin avec le système s. Soit c' le plus court chemin homotope à c. Il doit être clair, d'après la section 3.3.1, que s/c se réduit à s/c' : en effet, s/c et s/c' se réduisent au même mot irréductible et s/c' n'est pas réductible (ou, s'il l'est, on peut changer c' en un c'' de même longueur et homotope, de sorte que s/c'' s'obtient à partir de s/c' par cette réduction). On connaît donc la succession des chemins de s croisés par c' et l'on peut donc calculer une portion du revêtement universel, de taille polynomiale en l'entrée de l'algorithme et en le rapport des arêtes extrêmes, qui contient un relevé de c'. On peut étendre la méthode au cas des cycles. Par contre, pour une surface sans bord, un algorithme reste à trouver.

Courbes disjointes dans le graphe sommets-arêtes

Dans les applications, il est intéressant de calculer une décomposition d'une surface à l'aide de courbes *disjointes* sur le graphe sommets-arêtes de la surface, c'est-à-dire que chaque arête de la surface porte au plus une arête de la décomposition. Ceci n'est pas toujours possible dans le cas des systèmes fondamentaux de lacets, comme nous l'avons mentionné à la section 2.2.1.1, page 40. Mais comment, en imposant que les courbes soient disjointes (ou en limitant le nombre d'arêtes de la décomposition passant par une arête donnée de la surface), trouver une décomposition optimale ? Il est certainement possible de donner des heuristiques pour favoriser les familles de courbes qui passent par des arêtes disjointes, en utilisant nos algorithmes : par exemple, à chaque étape de raccourcissement d'une courbe, on pourra augmenter les poids des arêtes de la surface par lesquelles passent déjà certaines courbes. On peut espérer que cette modification donne de bons résultats en pratique ; mais, avec une telle modification, la convergence de l'algorithme n'est plus assurée, et il y a sans doute des conditions à trouver pour assurer sa stabilité. Ce problème mériterait une étude plus approfondie.

Annexe : Coût exponentiel de la méthode d'optimisation naïve

Lemme 3.49 *Il existe une surface $\mathcal{M}$, avec un graphe G (servant de méthode de calcul aux longueurs des chemins — voir la section 3.1), dont les arêtes ont un* *poids égal à un ($\alpha = 1$) et un point-base v_0, tels que le nombre de relevés de v_0 à distance au plus d d'un relevé donné est $2^{\Omega(d)}$.*

Démonstration. On choisit pour $\mathcal{M}$ un double-tore, ayant un système fondamental de lacets canonique, de point-base v_0, dont les éléments ont une longueur inférieure à K fixé. Appelons a, b, c et d les classes d'homotopie de ces lacets. Le groupe fondamental de $\mathcal{M}$ est le groupe libre engendré par a, b, c et d, quotienté par la relation $a.b.a^{-1}.b^{-1}.c.d.c^{-1}.d^{-1} = 1$.

Tout mot w sur les générateurs a, b et c et leurs inverses correspond à une classe d'homotopie qui peut être représenté par un lacet de taille $O(K.|w|)$. De façon équivalente, si l'on fixe un relevé v_0^ϵ de v_0, un tel w correspond à un relevé de v_0, appelé $R(w)$, à une distance $O(K.|w|)$ de v_0^ϵ.

De plus, le sous-groupe engendré par a, b et c est un groupe libre. Il s'ensuit que, si w et w' sont deux mots réduits distincts, alors $R(w) \neq R(w')$. Le nombre de mots réduits de longueur n sur l'alphabet $\{a, b, c, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}\}$ est $6.5^{n-1} \geqslant 5^n$, et chacun de ces mots correspond à un relevé de v_0 à distance $O(Kn)$ de v_0^ϵ. Donc le nombre de relevés à distance au plus d de v_0^ϵ est $\Omega(5^{d/K})$. $\square$

Étant donné un entier d, il existe toujours un lacet ℓ sur $\mathcal{M}$ qui est aussi court que possible dans sa classe d'homotopie et qui a pour longueur au moins d (il suffit de prendre pour ℓ un représentant optimal de la classe d'homotopie de $a.b^p$, où p est suffisamment grand : un tel ℓ peut même être choisi simple). Ainsi, la recherche « naïve » d'un plus court lacet homotope à ℓ, par calcul de plus court chemin entre les extrémités d'un de ses relevés dans le revêtement universel de $\mathcal{M}$, prendra un temps $2^{\Omega(d)}$.

Chapitre 4

Méthode barycentrique de Tutte appliquée aux isotopies

Ce chapitre reprend l'article [42], écrit avec M. Pocchiola et G. Vegter, initié dans mon mémoire de D.E.A. [39], avec quelques modifications (notamment, la démonstration du théorème barycentrique de Tutte a été incluse ici).

Résumé. Le sujet de cette étude est le théorème de plongement barycentrique de Tutte [152]. Nous donnons d'abord une autre démonstration de ce théorème ; nous présentons ensuite une méthode pour construire des isotopies de triangulations dans le plan, fondée sur le théorème de Tutte et un résultat de théorie de la rigidité, la correspondance de Maxwell–Cremona. Enfin, nous donnons un contre-exemple montrant que l'analogue du théorème de Tutte en dimension 3 est faux.

Introduction

Background on Tutte's barycentric theorem

In this chapter, we will use basic graph theory terminology, see for example [20]. Let $G = (V, E)$ be a planar graph. A *(straight-line) mapping* Γ of G into the plane is a function $\Gamma : V \cup E \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^2)$ which maps a vertex $v \in V$ to a point in $\mathbf{R}^2$ and an edge $e = uv \in E$ to the straight line segment joining $\Gamma(u)$ and $\Gamma(v)$. A mapping is an *embedding* if distinct vertices are mapped to distinct points, and the open segment of each edge does not intersect any other open segment of an edge or a vertex. (In this chapter, all mappings and embeddings are straight-line unless otherwise specified.)

In 1963, Tutte [152] gave a way to build embeddings of any planar, 3-connected graph $G = (V, E)$. Let C be a cycle whose vertices are the vertices of a face of G in some (not necessarily straight-line) embedding Γ' of G. Let Γ be a mapping of G into the plane, satisfying the conditions:

i. the set V_e of the vertices of the cycle C is mapped to the vertices of a strictly convex polygon Q, in such a way that the order of the points is respected;

ii. each vertex in $V_i = V \setminus V_e$ is a barycenter with positive coefficients of its adjacent vertices (Tutte assumed all coefficients to be equal to 1, but the proof extends without changes to this case). In other words, the images $\overline{v}$ of the vertices v under Γ are obtained by solving a linear system (S): for each $u \in V_i, \sum_{v|uv\in E} \lambda_{uv}(\overline{u} - \overline{v}) = 0$, where the λ_{uv} are positive reals. It can be shown that the system (S) admits a unique solution, see Section 4.5.

Theorem 4.1 (Tutte's Theorem) Γ *is an embedding of* G *into the plane, with strictly convex interior faces.*

The history of graph embeddings began early. Fáry [69], Stein [144] and Wagner [155] independantly showed that any planar graph admits a (straight-line) embedding. Now, the literature on this subject is abundant; a survey on graph drawing is [55]. See also the books by Ziegler [158] and Richter-Gebert [129] for the important connection between graphs and polytopes by Steinitz' theorem (any 3-connected, planar graph can be realized as the 1-skeleton of a 3D polytope).

Recent works focus on finding embeddings of graphs so that the coordinates of the vertices are integers with absolute value as small as possible; there is a linear algorithm [36] to embed graphs with $n+2$ vertices on the $(n \times n)$-grid with convex faces. Tutte's method with unit coefficients is not a valuable method for this purpose, since it can yield embeddings with exponential area if all coordinates are integers [58]. Any 3-connected planar graph with $n+1$ faces can be embedded on the $(n \times n)$-grid [70]. Other criteria are also interesting, such as controlling the shapes of the faces and/or minimizing the area of the embedding if a minimum distance between two vertices, or between a vertex and a non-incident edge, is imposed [35]. Another topic of interest is also to have an effective version of Steinitz' theorem. This can be done on the cubic grid of size 2^{13n^2}, where n is the number of vertices of the graph [129, p. 143].

Embeddings are not the only way to represent graphs; among others, an alternative approach is to represent the graph with a set of non-overlapping disks in the plane, one for each vertex, so that two vertices are adjacent if and only if the corresponding disks are tangent. This approach is called *circle packing* [136, 22].

Tutte's theorem is important in graph drawing; this is due to its simplicity and its geometric nature. It is the cornerstone of *Floater's parameterization technique* [72] for surface parameterization in computer graphics, used in multiresolution problems [59], texture mapping [109], and morphing [100, 73, 81].

In his paper [152], in addition to showing Theorem 4.1, Tutte simultaneously proves again Kuratowski's planarity criterion [103] of 1930: a graph is planar unless it contains a subdivision of one of the two Kuratowski graphs K_5 and $K_{3,3}$. The proofs of both results are entangled together in Tutte's paper; the consequence is that proving Theorem 4.1 by his method is long and involves quite a lot of graph theory terminology. Later, short proofs of Kuratowski's criterion were given by Thomassen [146], making Tutte's graph-theoretic viewpoint less attractive for the proof of Theorem 4.1.

Other proofs of this theorem exist in the literature, using a more geometric viewpoint. Becker and Hotz [10] use the notion of "quasi-planarity" as the limit case of a planar situation, which yields complicated notations and tedious case analyses; the structure of their paper is non-obvious and the proof is really long. Y. Colin de Verdière [43] shows the result, only for triangulated graphs, on arbitrary surfaces of non-positive curvature using the Gauss-Bonnet formula. More recently, in 1996, Richter-Gebert [129, Section 12.2] has given a simple and transparent proof of this theorem.

Our work

Proof of Tutte's theorem

We wrote in 2000 another proof of Tutte's theorem, without being aware of the existence of Richter-Gebert's proof at that time. Our proof appeared in a preliminary version of [42], and is included in this chapter. It ressembles Richter-Gebert's proof in the fact that the key idea of counting all angles of the mapping in two different ways has also been used in his proof, but some arguments are different.

Our proof is transparent and progressive; it consists of two clearly delimited stages. First, we show Tutte's result without effort under two additional restrictions:

iii. the graph G is triangulated: every face of Γ', except possibly the face corresponding to the cycle C, is a triangle;

iv. the images of these triangles under the mapping Γ are non-degenerate, *i.e.*, their interior is non-empty.

After that, we deal with the degeneracies, which are the core of the problem (in our proof as well as in other proofs): we show that under hypotheses (i) and (ii), three vertices belonging to a face are not on the same line. This step uses the non-planarity of $K_{3,3}$ together with simple geometric ideas. Then, the generalization to arbitrary 3-connected graphs comes easily.

Isotopies

Tutte's theorem yields a method, described by Floater and Gotsman [73] and Gotsman and Surazhsky [81], to morph two triangulations, the boundary being the same convex polygon in both embeddings. One can compute coefficients $\lambda_{uv} > 0$, for each interior vertex u and each neighbor v of u, so that u is the barycenter with coefficients $(\lambda_{uv})_v$ of its neighbors in the initial embedding. Doing the same for the final embedding and interpolating linearly the coefficients yields an isotopy (a continuous family of embeddings) by Tutte's theorem. This method leaves some freedom for the computation of the barycentric coefficients of the vertices in both embeddings. Hence, we study the following natural question: is it possible to apply the same technique, with the additional restriction that the coefficients are symmetric ($\lambda_{uv} = \lambda_{vu}$)? The interest is that this has a clear and appealing physical interpretation: fix the exterior vertices and edges and replace each interior edge joining two vertices u and v by a spring with rigidity λ_{uv}; then the equilibrium state of this physical system is the solution of the system (S).

The problem of computing such symmetric coefficients is solved with Maxwell–Cremona's theorem from rigidity theory. The drawback of our method is that these coefficients are not always positive, hence Tutte's theorem does not apply in all cases. After small experiments (with 20 vertices or so), we thought that our method always yielded an isotopy, even if some weights were negative. This is not the case, and we have small examples refuting this conjecture. However, our method gives positive coefficients if both embeddings are in the rather general class of regular triangulations (recall that a regular subdivision is the projection of the lower faces of a polytope generated by a family of points). This idea of replacing edges of a graph by springs has been used in several other contexts: in mechanics [156], for graph connectivity computation [110], in an algorithmic study of operations on polyhedra [96]. Force-directed algorithms (see [55]) are an important class of graph drawing methods that use springs (with, additionally, electric and/or magnetic forces). In [77] is described a tool for the visualization of evolving embeddings of graphs.

Generalization to 3D space

Finally, we study the extension of Tutte's theorem to three dimensions. We present an overview of the proof that there exist two triangulations of a tetrahedron which are combinatorially equivalent but for which there is yet no linear isotopy from one to the other, a fact which is specific to spaces of dimension ≥ 3. This result has been stated by Starbird in [141]; we give an outline of the proof and explain parts of the proof not written in his paper and required to show this theorem. Then we show that the natural generalization of Tutte's barycentric embedding theorem is false in 3D. The translation of Tutte's hypotheses (in the triangulated case) from 2D to 3D is as follows: consider an embedding of a simplicial 3-complex K into $\mathbf{R}^3$, the boundary being a convex polyhedron. If a mapping of K into $\mathbf{R}^3$, with the same boundary, is so that each interior vertex is barycenter with positive coefficients of its neighbors, then we would expect that it is an embedding. It turns out that this fact is false. To our knowledge, this attempt of generalizing Tutte's theorem for 3D complexes is new, and our refutation of this extension raises interesting open questions, in the context of isotopies as well as in view of embedding 3-complexes.

4.1 Proof of Tutte's theorem

We prove here Tutte's theorem ([152], relying on [151]).

We first rephrase condition (ii) in more compact terms. Define the *strict convex hull* of a set of points to be the interior, in the space affinely generated by these points, of the convex hull of these points. It is then easy to see that condition (ii) is equivalent to the following:

ii'. each $v \in V_i$ lies in the strict convex hull of its adjacent vertices.

A proof of this equivalence is provided for completeness in Section 4.4. We thus need not use System (S) anymore; the proof of its invertibility is easy and

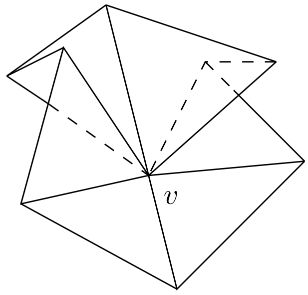


Figure 4.1: The triangles with v as a vertex, involved in the computation of $\sigma(v)$.

not necessary for the proof of Tutte's theorem, we defer it to Section 4.5.

Recall that Γ' is a (not necessarily straight-line) embedding of G with facial cycle C. In the sequel, Γ' is our reference embedding, and we shall call the *faces of* G (or *triangles* if (iii) is satisfied) the faces of the embedding Γ' except the face bounded by C. We first state a preliminary lemma, assuming the hypotheses of Theorem 4.1:

Lemma 4.2 *Each $v \in V_i$ is mapped by Γ into the interior of the polygon Q.*

Proof. First, each vertex in V_i is mapped, by Γ, into the interior or the boundary of the polygon Q. For if this is not the case, by convexity of Q, there is a vertex $v \in V_i$ so that Q and $\overline{v}$ are separated by a line D. Among the vertices whose images under Γ lie on the same side of D as v, consider those which are the farthest from D. Obviously, at least one of these vertices cannot be in the strict convex hull of its adjacent vertices.

Suppose that a vertex $v \in V_i$ is mapped into the boundary of Q, on a line D which contains an edge of Q. Because the image of any vertex lies in the same (closed) half-plane bounded by D, and by condition (ii'), the vertices in V_i which are adjacent to v are also contained in D. Thus, all vertices of the connected component of v in $G - V_e$ lie on D. This contradicts the 3-connectivity of G, because removing the two vertices of V_e which are on D destroys the connectivity of G. $\square$

4.1.1 Proof of the theorem in a special case

Our intermediate goal is now to prove the theorem under the additional assumptions (iii) and (iv). We first show a local planarity property for Γ.

Lemma 4.3 *Under assumptions (iii) and (iv), the interiors of the images of two distinct triangles of G which share a common vertex do not overlap.*

Proof. By (iv), the angles of a triangle are well-defined and positive. We first introduce some terminology. For each vertex v, let $\alpha(v)$ be equal to 2π if $v \in V_i$, and to the angle of the polygon Q at v if $v \in V_e$; let $\sigma(v)$ be the sum, over all the triangles incident to v, of the angle of the image of such a triangle at v under the mapping Γ (Figure 4.1). Our aim is to show that, for each vertex v, $\sigma(v) = \alpha(v)$, that is, there is no "folding" at v in the mapping Γ. Because all faces of G are triangles, the structure of G in the neighborhood of a vertex v is quite simple: the vertices adjacent to v form a cycle (if $v \in V_i$) or a path (if $v \in V_e$). Let us call $v_1, \ldots, v_p$ the neighbors of v in the order of this cycle (or path).

A key ingredient of the proof of Lemma 4.3 is the following fact: $\sigma(v) \geq \alpha(v)$, with equality if and only if the triangles incident to v do not overlap. To prove this, let $\theta(uvw)$ be the geometric angle (between 0 and π) of the triangle uvw at v in the mapping Γ, and assume v to be in V_i (the proof is easier for v in V_e). By (ii') and (iv), $\overline{v}$ lies in the interior of the convex hull of $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_p$. It also lies in the interior of the convex hull of three of these vertices, as can easily be shown by hand (this is Carathéodory's Theorem in dimension two). Hence, there exist i, j and k so that $1 \leq i < j < k \leq p$ so that the sum of the angles $\theta(v_i v v_j)$, $\theta(v_j v v_k)$ and $\theta(v_k v v_i)$ equals 2π. We have $\sum_{q=i}^{j-1} \theta(v_q v v_{q+1}) \geq \theta(v_i v v_j)$, and similar relations between j and k and between k and i. Adding these three inequalities, we obtain that $\sigma(v) \geq 2\pi$. Moreover, equality holds if and only if there is equality in all previous sums, that is, the ordering of the vertices $v_1, \ldots, v_p$ around v is preserved in Γ, which is also equivalent to the fact that the triangles incident to v do not overlap.

Now, let t be the total number of triangles. We have:

$$(2|V_i| + |V_e| - 2)\pi = \sum_{v \in V} \alpha(v) \leq \sum_{v \in V} \sigma(v) = \pi t. \tag{4.1}$$

The first equality is a consequence of the fact that the sum of the angles of the polygon Q is $(|V_e| - 2)\pi$, the inequality has been shown above, and the second equality is true because the sum of the angles of a triangle in the plane equals π. We claim that, on the other hand, the leftmost and rightmost members of (4.1) are equal. Indeed, Euler's formula, applied to the planar graph G, yields (if e is the number of interior edges):

$$(|V_i| + |V_e|) - (|V_e| + e) + (t + 1) = 2. \tag{4.2}$$

The fact that every face of G has three edges is expressed by:

$$3t = 2e + |V_e|. \tag{4.3}$$

Combining equations (4.2) and (4.3) to eliminate e leads to equality of the extreme members of (4.1), as claimed. Since also $\sigma(v) \geq \alpha(v)$, we get: for each $v \in V, \sigma(v) = \alpha(v)$. Using then the equality case in the fact given above, we obtain that the triangles incident to v do not overlap, which concludes the proof. □

We now show global planarity, that is, Γ is an embedding.

Lemma 4.4 *Under restricting assumptions (iii) and (iv), Theorem 4.1 holds.*

Proof. First note that the vertices, edges and triangles of G define an (abstract) 2-dimensional simplicial complex K. In fact, one can view K as a 2-manifold with boundary: each point of this manifold is defined by its barycentric coordinates in a triangle of G, with the obvious identifications of points on edges or vertices. Γ induces a map from this manifold K into Q: for each point p in K, determined by its barycentric coordinates in a triangle uvw, its image $\Gamma(p)$ is the point in the triangle $\overline{uvw}$ with the same barycentric coordinates. In this setting, Γ is continuous and even a local homeomorphism: each point p has a neighborhood $N(p)$ so that $\Gamma|_{N(p)}$ is a homeomorphism on its image set. This is clear for points p in the interior of a triangle and Lemma 4.3 proves this fact if p belongs to an edge or is a vertex of a triangle. If a is a point inside or on the boundary of Q, $n(a) = |\Gamma^{-1}(a)|$ is finite; for otherwise, by compactness, there would be an accumulation point of the set $\Gamma^{-1}(a)$, contradicting the local homeomorphism property.

Let a be a point in or on the boundary of Q, and $p = n(a) \geq 0$; we show that $n(b) = p$ for b sufficiently close to a (that is, the function n is locally constant). Let $N_1, \ldots, N_p$ be disjoint open neighborhoods of each of the points in $\Gamma^{-1}(a)$, chosen small enough so that $\Gamma|_{N_i}$ is a homeomorphism for each i. Let $N = \Gamma(N_1) \cap \cdots \cap \Gamma(N_p)$. N is a neighborhood of a; $F = \Gamma(K \setminus (N_1 \cup \cdots \cup N_p))$ is a compact set which does not contain a; hence $N' = N \setminus F$ is a neighborhood of a. Each $b \in N'$ has exactly p preimages in $N_1 \cup \cdots \cup N_p$ because $b \in N$ and no preimage outside this set because $b \notin F$. Thus, by connectivity of Q, n is constant; its value is 1 on the boundary of Q by Lemma 4.2, hence Γ is a homeomorphism. The proof is complete. $\square$

4.1.2 The general case

We have proved the theorem in a particular case; we will use this result in the sequel. From this point, unless stated otherwise, we do not assume conditions (iii) and (iv) anymore, but only the hypotheses of Theorem 4.1. The goal is to show that some degenerate cases cannot occur, using the 3-connectivity of G. We first state a quite general lemma, inspired by Tutte [152], which we call the Y–lemma in view of the geometry of the problem. The situation is depicted in Figure 4.2. Note that, in this section, any path in a graph is supposed to be simple and non-degenerate.

Lemma 4.5 (Y–lemma) *Let v_1, v_2, v_3 and v be pairwise distinct vertices of a graph H. Assume, for $i = 1, 2, 3$, that there is a path P_i from v_i to v which avoids the v_j's (for $j \neq i$). Then there exist three paths P'_i, from v_i to a common vertex v', which are pairwise disjoint (except at v').*

Proof. First, using P_1 and P_2, we easily get a (simple) path R from v_1 to v_2, so that R and P_1 have the same first edge v_1z. Then we consider the path P_3. If this path P_3 intersects R, let v' be the first vertex of intersection on P_3. v' splits R in two parts, which we call P'_1 (from v_1 to v') and P'_2 (from v_2 to v'); P'_3 is the part of P_3 going from v_3 to v', with loops removed (if any). The P'_i's satisfy the property stated in the lemma. If P_3 does not intersect R, we call v' the last vertex on P_1 (when going from v_1 to v) which is also on R. Such a vertex exists

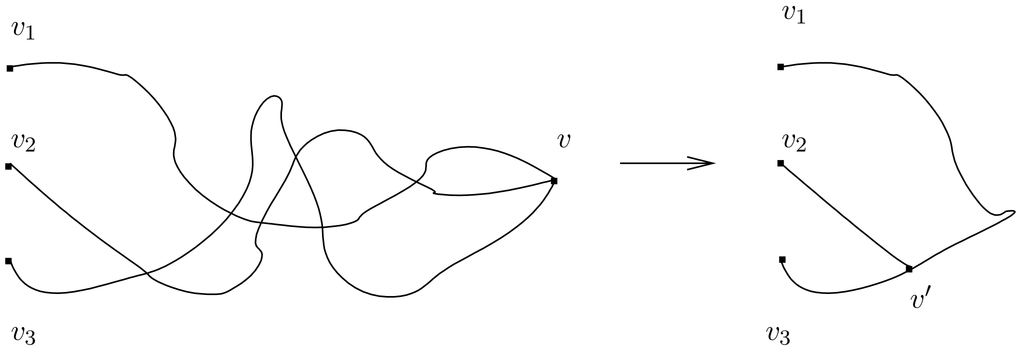


Figure 4.2: The situation in the Y–lemma.

and is different from v_1 because $v_1 z$ is the first edge of R and P_1. Let P_3' be the path defined by P_3 followed by the part of the path P_1 which goes from v to v', with loops removed (if any). v' splits R in two parts, which we call P_1' and P_2'. The paths P_i''s satisfy the desired property. □

We now come back to the situation of Theorem 4.1, and we introduce some geometric definitions, partially taken from [152]. We will represent a line in the plane by the zero set of a non-constant affine form. Henceforth, φ is such an affine form. A vertex v of G is called *φ-active* if there is a vertex v' adjacent to v so that $\varphi(\overline{v}) \neq \varphi(\overline{v}')$, *$\varphi$-inactive* otherwise. The *φ_+-poles* are the vertices $v \in V$ so that $\varphi(\overline{v})$ is maximal; the definition for the *φ_--poles* is analogous. The *φ-poles* are the φ_+-poles and the φ_--poles. By Lemma 4.2, a φ-pole must be in V_e. It is then clear that there are exactly one or two φ_+-poles and that, in the latter case, they are connected by an edge of Q. If $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k$ lie on the line $\varphi = 0$, $G(\varphi_+, v_1, \ldots, v_k)$ is the graph induced by the vertices lying in the half-plane $\varphi > 0$, to which we add the vertices $v_1, \ldots, v_k$ and all edges from one of these vertices to a vertex in $\varphi > 0$. Let $G(\varphi)$ be the subgraph of G induced by the vertices v lying on the line $\varphi = 0$. The following lemma was also shown in [152].

Lemma 4.6 *Let v be a φ-active vertex so that $\varphi(\overline{v}) = 0$; assume that v is not a φ_+-pole. Then there exists a path in $G(\varphi_+, v)$ from v to a φ_+-pole of G.*

Proof. The problem boils down to this: given a φ-active vertex w, which is not a φ_+-pole, prove that it is possible to find a neighbor of w which has a greater value of φ and is also φ-active. If $w \in V_e$, there exists in V_e a vertex adjacent to w which has a greater value of φ; this vertex is also φ-active. If $w \in V_i$, then w has neighbors in both increasing and decreasing directions of φ, because a vertex is in the strict convex hull of its adjacent vertices (hypothesis (ii')) and because w is φ-active. It is therefore possible to find an adjacent vertex with a greater value of φ. This vertex is also φ-active. □

The two following lemmas show that some degenerate cases cannot occur. The first one is along the lines of [152], contrary to the second one which uses another argument.

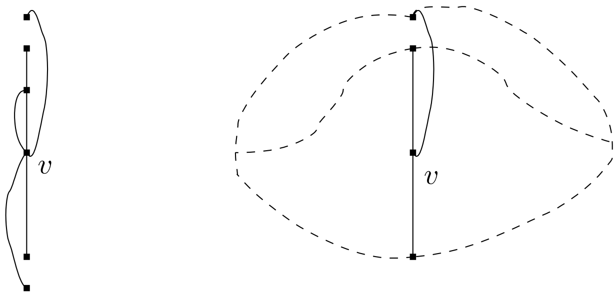


Figure 4.3: A summary of the proof of Lemma 4.7.

Lemma 4.7 *For any φ, G has no φ-inactive vertex.*

PROOF. Suppose that there is a φ-inactive vertex v. Figure 4.3 summarizes the proof: we show that the planar graph G contains a subdivision of the bipartite graph $K_{3,3}$, which is impossible (see for example [148]). Using the fact that G is 3-connected, we can see the existence, in $G(\varphi)$, of three distinct φ-active vertices $v_i, i = 1, 2, 3$, and three paths P_i joining v to v_i, so that, for any i, the path P_i does not contain any vertex v_j for $j \neq i$. Indeed, let w be a vertex of G so that $\varphi(\overline{w}) \neq 0$. By connectivity of G, take a path from v to w and, on this path, take the first φ-active vertex and call it v_1. Do the same in $G - \{v_1\}$ and choose v_2 (use 2-connectivity). Finally, use 3-connectivity to select v_3 in $G - \{v_1, v_2\}$.

Applying then the Y–lemma in $G(\varphi)$, we get the existence of a vertex v' in $G(\varphi)$, together with three distinct paths (except at v') P_i from v_i to v' in $G(\varphi)$. We now use Lemma 4.6. We have the existence, in $G(\varphi_+, v_1, v_2, v_3)$, of three paths Q_i joining v_i to a vertex x so that $\varphi(\overline{x}) > 0$. Then, the Y–lemma allows us to assume, by changing x and the Q_i's if necessary, that these three paths are disjoint (except at x). Similarly, in $G(\varphi_-, v_1, v_2, v_3)$, we have three disjoint paths R_i joining v_i to a vertex y so that $\varphi(\overline{y}) < 0$. Using the paths P_i, Q_i and R_i, which are all pairwise disjoint except at their endpoints, and the vertices x, v', y and v_1, v_2, v_3, we get a subdivision of the graph $K_{3,3}$. This contradicts the planarity of G. $\square$

Lemma 4.8 *Let v_i, $i = 1, 2, 3$, be three vertices of a face of G. Then, under Γ, the v_i's are not collinear.*

PROOF. Suppose the v_i's are on the line $\varphi = 0$. Figure 4.4 gives the essential ideas of the proof: we again find a subdivision of $K_{3,3}$. By Lemma 4.7, the v_i's are φ-active. Since the v_i's are collinear, at least one of them is in V_i, so none of them is a φ-pole. Again, Lemma 4.6 and the Y–lemma show the existence of a vertex x and three disjoint paths (except at x) Q_i joining v_i to x in $G(\varphi_+, v_1, v_2, v_3)$. Using a similar argument on the other side of the line $\varphi = 0$, we finally obtain the existence of x, y and six disjoint (except at their endpoints) paths joining x or y to the v_i's. Let G' be the graph G to which we add a vertex w linked to the v_i's. Because the v_i's belong to a common face, G' is planar. But it also contains a subdivision of $K_{3,3}$ (with the six paths described above and the three new paths joining w to the v_i's), which is impossible. $\square$

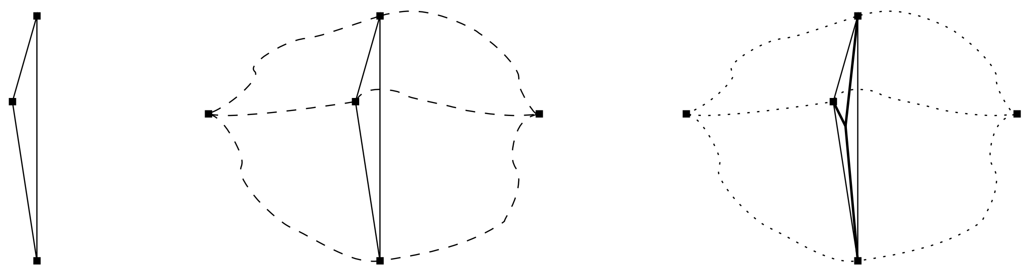


Figure 4.4: A summary of the proof of Lemma 4.8.

The two previous lemmas have been shown merely under the hypotheses of Theorem 4.1. Lemma 4.7 will be used to deal with the non-triangulated case. But here, as a straightforward consequence, we get the proof of the theorem in the triangulated case:

Corollary 4.9 *Theorem 4.1 holds when (iii) is satisfied, that is, in the particular case where each face of G is a triangle.*

Proof. Indeed, assuming condition (iii), Lemma 4.8 states that condition (iv) is also true. We can thus apply Lemma 4.3. Therefore, Γ is an embedding. $\square$

We can now prove Theorem 4.1 in full generality. We first triangulate G. More precisely, this means that edges are added to split the faces of G in triangles, without adding vertices (this is done in a purely combinatorial way: no geometry is involved here). Let G_1 be this planar augmented graph. Adding the same edges in the mapping Γ gives us a mapping Γ_1 of the graph G_1. We now check that we can apply Corollary 4.9 to G_1 and Γ_1. In fact, this boils down to checking condition (ii') to Γ_1. By condition (ii') and Lemma 4.7 applied to Γ, the neighbors of an interior vertex are not all on a line (under Γ), and such a vertex is in the interior of the convex hull of its neighbors. Because Γ_1 is obtained from Γ by adding extra edges, condition (ii') also holds for Γ_1. Thus, by Corollary 4.9, Γ_1 is an embedding. Deleting the edges we added earlier to Γ, we obtain that Γ is an embedding as well. It is clear that the faces are strictly convex.

4.2 Isotopies in the plane

Now, we detail the construction of the isotopy outlined in the introduction. Let $G = (V, E)$ be a 3-connected planar graph, and let Γ_0 and Γ_1 be two embeddings of G into the plane. We look for an isotopy between Γ_0 and Γ_1, restricting ourselves to the following situation: the boundary cycle C of the exterior face of Γ_0 is a convex polygon, it bounds also the exterior face of Γ_1, and the corresponding vertices of C are at the same location in Γ_0 and Γ_1. During the isotopy, the vertices of C have to remain at the same position. In addition, we will require the graph G to be triangulated. See Figure 4.5.

A natural idea arising to solve this problem is the following: try to deform Γ_0 into Γ_1 by keeping the exterior vertices at the same place and moving the

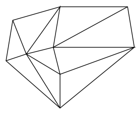


Figure 4.5: An isotopy Γ_t ($t \in [0,1]$) in our framework: here Γ_0, $\Gamma_{1/2}$ and Γ_1 are depicted.

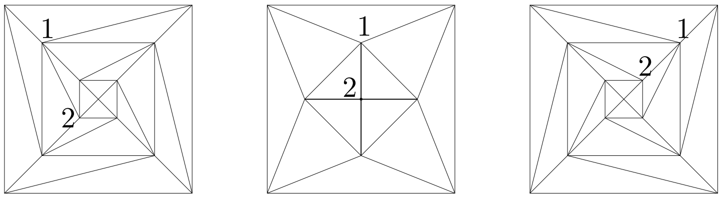


Figure 4.6: An example showing that the naive approach does not work. The figure shows Γ_0 (left) and Γ_1 (right). The two inner squares are "twisted" to the left (resp. right) under Γ_0 (resp. Γ_1), and the innermost square must rotate by an angle of π in the whole motion. With the linear motion, the vertices of the inner square would collapse at $t = 1/2$, as shown in the picture in the middle. Therefore, this motion does not yield an isotopy.

interior vertices linearly. That is, $\Gamma_t(v) = (1-t)\Gamma_0(v) + t\Gamma_1(v)$ for an interior vertex v and t in $[0,1]$. It turns out that this approach does not always yield an isotopy, as Figure 4.6 demonstrates. Bing and Starbird [15], generalizing a result by Cairns [26], showed the existence of an isotopy in the context described above; if the cells are strictly convex, one can ensure that they remain strictly convex during the deformation [147]. A series of more mathematical papers study the topological space of embeddings of a given triangulation (with boundary fixed), also called the set of homeomorphisms of a (2D) simplicial complex K that are affine linear on each simplex of K and are the identity on the boundary of K: in [18], it is proved that (if the outer boundary is convex) it is homeomorphic to $\mathbf{R}^{2k}$ where k is the number of interior vertices. See also the references in that paper for further reading on this topic.

However, these papers do not provide an algorithmic solution to this problem. As explained in the introduction, Gotsman et al. [73, 81] gave a method, based on Tutte's theorem, to solve this isotopy problem, representing a vertex as barycenter of its neighbors. We will use the following definitions in order to study the case where the barycentric coefficients are symmetric. Let E_i be the set of (undirected) interior edges (the edges for which at least one incident vertex is in V_i). A *weight function* on Γ, or *stress*, is a map $\omega : E_i \to \mathbf{R}$; hence $\omega_{uv} = \omega_{vu}$. ω is *positive* if $\omega_{uv} > 0$ for each interior edge uv. If ω and the positions of each $v \in V_e$ are fixed, the *equilibrium state* is defined by the system: for each $u \in V_i$, $\sum_{v|uv\in E} \omega_{uv}(\overline{u} - \overline{v}) = 0$. In these conditions, ω is an *equilibrium stress* for Γ.

Here is a summary of our approach: compute equilibrium stresses ω^0 (resp. ω^1) of embeddings Γ_0 (resp. Γ_1); then, for $t \in [0,1]$, compute the equilibrium state of $\omega^t = (1-t)\omega^0 + t\omega^1$. The difficulty resides in computing an equilibrium stress for a given embedding Γ: our method relies on Maxwell–Cremona's correspondence,

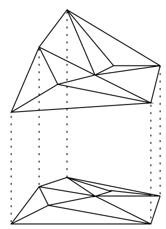


Figure 4.7: A lift of an embedding.

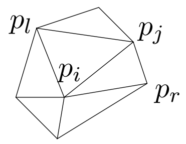


Figure 4.8: The notations for the computation of ω_{ij}.

a theorem well-known in rigidity theory (see Hopcroft and Kahn [96] for details on this theorem, and [85] for a general introduction to rigidity theory). Think of Γ as being in the plane $z = 0$ of $\mathbf{R}^3$. Take any *lift* of Γ, by adding to each vertex $\bar{v} = p_v = (x_v, y_v, 0)$ of Γ a third coordinate, leading to $q_v = (x_v, y_v, z_v)$. Consider the polyhedral terrain whose vertices are the q_i's and which has the same incidence structure as Γ (Figure 4.7). Now, let ij be an interior edge of Γ; let l and r be the left and right neighbor of the (oriented) edge ij (Figure 4.8) and φ_{ij}^L (resp. φ_{ij}^R) the affine form which takes the value z_i, z_j, z_l (resp. z_r) at points p_i, p_j, p_l (resp. p_r). We will define an equilibrium stress for Γ determined by this lift.

If $a_0, \ldots, a_k$ are $k+1$ points of $\mathbf{R}^k$, written as column vectors, we introduce the multi-affine bracket operator $[a_0, \ldots, a_k]$, defined by

$$[a_0, \ldots, a_k] = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_k \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

(this quantity being proportional to the signed volume of the convex hull of the a_i's).

Lemma 4.10 *For each interior edge ij and any $p \in \mathbf{R}^2$,*

$$\varphi_{ij}^L(p) - \varphi_{ij}^R(p) = \frac{[p_i, p_j, p]}{[p_i, p_j, p_l]} (\varphi_{ij}^L(p_l) - \varphi_{ij}^R(p_l)).$$

Proof. It is a consequence of Cramer's formula. Let φ be an affine form on $\mathbf{R}^k$ and $a_0, \ldots, a_k$ be $k+1$ affinely independent points, $a \in \mathbf{R}^k$. Let $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ be the barycentric coordinates of a with respect to the a_i's, that is, by definition:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_0 a_0 & + & \ldots & + & \alpha_k a_k & = a \\ \alpha_0 & + & \ldots & + & \alpha_k & = 1. \end{array}$$

Cramer's formula now implies:

$$\alpha_i = \frac{[a_0, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_k]}{[a_0, \ldots, a_k]}.$$

So (if $k = 2$, and because φ is an affine form):

$$\varphi(a) = \frac{[a, a_1, a_2]}{[a_0, a_1, a_2]}\varphi(a_0) + \frac{[a_0, a, a_2]}{[a_0, a_1, a_2]}\varphi(a_1) + \frac{[a_0, a_1, a]}{[a_0, a_1, a_2]}\varphi(a_2).$$

It is now easy to conclude. □

Define, for any interior edge ij and for a point p not on the line $(p_i p_j)$:

$$\omega_{ij} = \frac{\varphi^L_{ij}(p) - \varphi^R_{ij}(p)}{[p_i, p_j, p]}.$$

This definition does not depend on the point p, by Lemma 4.10. Furthermore, $\omega_{ij} = \omega_{ji}$. In practice, there is an intrinsic formula (recall that the q_i's are the lifts of the points p_i's, which are the images of the vertices under Γ):

Lemma 4.11 $\omega_{ij} = \dfrac{[q_i, q_j, q_l, q_r]}{[p_i, p_j, p_l][p_i, p_j, p_r]}$.

Proof. By definition of ω_{ij}:

$$\omega_{ij}[p_i, p_j, p_l][p_i, p_j, p_r] = (z_l - \varphi^R_{ij}(p_l))[p_i, p_j, p_r]. \tag{4.4}$$

By Cramer's formula, as in the proof of Lemma 4.10:

$$\varphi^R_{ij}(p_l)[p_i, p_j, p_r] = z_i[p_l, p_j, p_r] + z_j[p_i, p_l, p_r] + z_r[p_i, p_j, p_l].$$

Thus the left member of Equation (4.4) equals

$$z_l[p_i, p_j, p_r] - z_i[p_l, p_j, p_r] - z_j[p_i, p_l, p_r] - z_r[p_i, p_j, p_l],$$

which equals $[q_i, q_j, q_l, q_r]$ (by developping this determinant with respect to the third line). □

‖ **Theorem 4.12** *ω is an equilibrium stress for Γ.*

Proof. For any point p in the plane, $i \in V_i$, we have:

$$\sum_{j|ij\in E} \omega_{ij}[p_i, p_j, p] = \sum_{j|ij\in E} (\varphi^L_{ij}(p) - \varphi^R_{ij}(p)) = 0,$$

because the affine form φ corresponding to a face incident to p_i appears twice in this sum, once counted positively, once negatively. As $[p_i, p_j, p] = \det(p_j - p_i, p - p_i)$, this implies

$$\det\Big(\sum_{j|ij\in E} \omega_{ij}(p_i - p_j), p - p_i\Big) = 0,$$

for each point p in $\mathbf{R}^2$. Therefore

$$\sum_{j|ij\in E} \omega_{ij}(p_i - p_j) = 0.$$

□

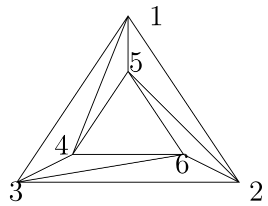


Figure 4.9: An embedding which is not a regular subdivision. Indeed, assuming it is possible to lift it to a lower convex hull, we can suppose, by adding a suitable affine form to all the z_i's, that $z_4 = z_5 = z_6 = 0$. If this graph were a regular subdivision, we would have $z_1 > z_2 > z_3 > z_1$, which is impossible.

Thus, each lift of the embedding Γ determines an equilibrium stress on Γ. Conversely, it is possible to show that an equilibrium stress determines a unique lift of Γ, up to the choice of an affine form of $\mathbf{R}^2$ (Maxwell's theorem, shown for example in [96] in a slightly different context).

If we have *positive* equilibrium stresses ω^0 and ω^1 of Γ_0 and Γ_1 respectively, we have a method to compute an isotopy between Γ_0 and Γ_1: by Tutte's theorem, because $\omega^t = (1-t)\omega^0 + t\omega^1$ is a positive stress for each $t \in [0,1]$, the corresponding mapping Γ_t is an embedding, and $(\Gamma_t)_{t\in[0,1]}$ is clearly continuous (the map which associates to each invertible matrix its inverse, is continuous), hence an isotopy. Furthermore, it is easy to characterize the set of embeddings which admit a positive equilibrium stress: an edge ij has a positive weight if and only if the line q_iq_j (with the notations above) is under the line q_lq_r. Recall that a *regular triangulation* is a triangulation which is the projection of the lower faces of a polytope generated by a family of points, see [158]. Hence an embedding has a positive stress if and only if it is a regular triangulation. Therefore, we have:

Theorem 4.13 *If Γ_0 and Γ_1 are regular triangulations, then we can compute an isotopy between Γ_0 and Γ_1.*

Testing whether Γ is a regular subdivision, and, if so, computing a positive lift, can be done easily using linear programming; indeed, we have a convex lift for Γ if and only if, for each interior edge ij and with the notations above, $[q_i, q_j, q_l, q_r] < 0$, which is a linear inequality in the z_k's. Not all triangulations are regular subdivisions, as shown in Figure 4.9 (see [158, p. 132]), but a large class of embeddings are regular subdivisions, including Delaunay triangulations for example (because the Delaunay triangulation of a set of points is the projection of the edges of the convex hull of the points lifted on the standard paraboloid, see [19, p. 437] or [60, p. 303]); this remark might be useful because of the wide use of these triangulations in computational geometry.

In practice, we tried to build an isotopy between a random triangulated embedding and the "canonical" embedding of the same graph (that is, the embedding obtained by Tutte's method when all weights equal 1). We lift Γ_0 to the standard paraboloid $z = x^2 + y^2$, compute the equilibrium stress ω_0, and use linear interpolation between ω^0 and the unit weights ω^1. Although the initial stress is not necessarily positive, it turns out that, in many (not too big) cases, this

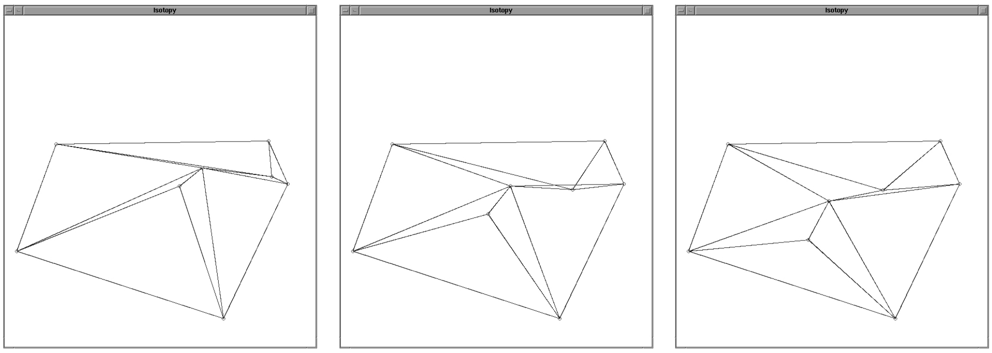


Figure 4.10: An example of non-planarity with the linear interpolation between the weights of a lift on the standard paraboloid, and unit weights.

method yields an isotopy; long experiments have been necessary to find a small counterexample like Figure 4.10. See Section 4.6 for numerical coordinates. Our smallest counterexample uses 4 outer vertices and 2 inner vertices, but the failure is very hard to see on the screen and can only be proved by computation. Lifting on the paraboloid may give an isotopy even if the considered triangulation is non-regular, like in Figure 4.6, but can also fail with regular triangulations (the initial and final triangulations in Figure 4.10 are regular). This method has been programmed in C++ using Numerical Recipes and the LEDA library, and also in Mathematica for exact computations.

Several other approaches could be done in the same spirit to try to find a method which would work for a larger class of embeddings than the regular subdivisions. One could attempt to study the space of stresses which yield an embedding (thus an isotopy corresponds to a path in this space). If we restrict ourselves to the linear interpolation between the weights, an important question is: are there two embeddings Γ_0 and Γ_1 so that, for any lifts of Γ_0 and Γ_1, the interpolation $\omega^t = (1-t)\omega^0 + t\omega^1$ of the corresponding weights does not yield an isotopy? If it is not the case, how to compute the lifts?

We have seen that using linear interpolation from the weights of a lift on the standard paraboloid to unit weights does not always yield an isotopy. Nevertheless, we have the following conjecture (checked during all our experiments): during this interpolation, the matrix involved in the computation of the positions of the points is symmetric positive definite.

If it is the case, it has the following interesting consequence. If ω is a stress on G, let us denote by M_ω the matrix involved in the inversion of System (S). It can be shown (see the proofs of Lemma 4.18) that M_ω is symmetric positive definite if ω is positive; moreover, $\omega \mapsto M_\omega$ is linear. If M_{ω^0} and M_{ω^1} are symmetric positive definite, so is $M_{(1-t)\omega^0+t\omega^1} = (1-t)M_{\omega^0} + tM_{\omega^1}$, and uniqueness of the positions of the vertices is guaranteed during the motion (which may fail to be an isotopy). Similarly, if M_{ω^0} is symmetric positive definite and ω^1 is a positive stress, since multiplying ω^1 by a positive number does not affect the equilibrium state, we can assume $\omega^1 \geq \omega^0$ (this notation simply means that for each interior edge ij, $\omega^1_{ij} \geq \omega^0_{ij}$). Each nondecreasing family ω^t of stresses from ω^0 to ω^1 yields a family M_{ω^t} of symmetric positive definite matrices; indeed, $M_{\omega^t} = M_{\omega^0} + M_{\omega^t - \omega^0}$; the first matrix of the right term is symmetric positive definite, the second one is positive because the corresponding stress is non-negative on each interior edge. Thus, if this conjecture is true, the positions of the vertices are uniquely determined for many choices of the interpolation between the weights.

4.3 Generalization to 3D space

We explain here why the analogue of Tutte's theorem is false in 3D space, thus making it difficult to build isotopies in 3D. Here, it is convenient to use combinatorial simplicial complexes (all simplicial complexes considered here are combinatorial, not geometric; see for example [153]).

We introduce some other definitions, generalizing those in 2D. A *mapping* f from a simplicial complex C into $\mathbf{R}^d$ is a map from all the simplexes of C into $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ satisfying: if $\{v_1, \ldots, v_p\}$ is a simplex of C,

$$f(\{v_1, \ldots, v_p\}) = \mathrm{Conv}\ \{f(v_1), \ldots, f(v_p)\}.$$

An *embedding* of C into $\mathbf{R}^d$ is a mapping so that, for any two simplexes $\sigma, \tau \in C$, $f(\sigma \cap \tau) = f(\sigma) \cap f(\tau)$. As usual, an *isotopy* $(h(t))$ $(t \in [0,1])$ of C into $\mathbf{R}^d$ is a continuous family of embeddings of C into $\mathbf{R}^d$. Finally, the *image* of a simplicial complex C by a mapping f is the union of the sets $f(\tau)$, over all simplexes τ of C.

In this section, we will often manipulate complexes whose embeddings have to be fixed on the "boundary" of these complexes. A *3-complex with tetrahedral boundary* (C, B, b) is a simplicial 3-complex C with a subcomplex $B \subset C$ so that B is simplicially equivalent to the boundary of a 3-simplex, together with an embedding b of B into $\mathbf{R}^3$. An *embedding* f of (C, B, b) into $\mathbf{R}^3$ is an embedding of C so that $f|_B = b$ and the image of f is exactly the tetrahedron bounded by the image of b. An *isotopy* of a 3-complex with tetrahedral boundary is a continuous family of embeddings.

The goal of this section is to show:

Theorem 4.14 *There exist a complex with tetrahedral boundary (C, B, b), and two mappings f and j of (C, B, b) into $\mathbf{R}^3$, such that:*

1. *f is an embedding,*
2. *$j|_B = f|_B$,*
3. *each vertex in $C \setminus B$ is, under j, barycenter with positive coefficients of its neighbors,*
4. *but j is not an embedding.*

This theorem is a counterexample to the analogue of Tutte's theorem in three dimensions: the first condition is the analogue of planarity, the second condition fixes the images of the exterior vertices by j and the third one is the condition for the interior vertices.

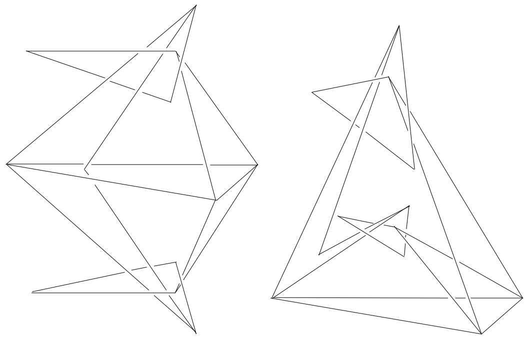


Figure 4.11: Starbird's embeddings f_1 and g_1 of C_1.

The cornerstone for the proof of Theorem 4.14 is the description by Starbird [141] of a graph C_1, embedded into $\mathbf{R}^3$ in two different ways f_1 and g_1, so that it is impossible to deform one embedding to the other without bending the edges. Yet, if bending the edges is allowed, such a deformation becomes possible. These embeddings are depicted in Figure 4.11, copied from his paper. We found coordinates for the vertices of these embeddings, available in Section 4.7. In the lemma below, we rephrase the properties stated by Starbird.

Lemma 4.15 *The following holds:*

1. *There are a 3-complex with tetrahedral boundary (C, B, b), so that C contains C_1, and two embeddings f and g of (C, B, b) extending respectively f_1 and g_1.*

2. *If C, f and g satisfy the preceding condition, there is no isotopy of (C, B, b) taking f to g.*

The first part of Lemma 4.15 expresses the fact that f and g are combinatorially equivalent triangulations (tetrahedralizations for purists) of a tetrahedron, with the same boundary. Despite this, as stated in the second part, there is no isotopy from f to g. It is to be noted that the analogue of this lemma is false in 2D by Tutte's theorem.

The proof of the second part of this lemma is given in detail in Starbird's paper, we shall not explain the argument here. Shortly said, the author uses properties of piecewise linear curves embedded in 3D space to show that the embeddings f_1 and g_1 cannot be deformed from one to the other while keeping the edges of C_1 straight, for otherwise at some stage of the isotopy there would be a degeneracy which would prevent to have an embedding. Then, because f (resp. g) extends f_1 (resp. g_1), there cannot be any isotopy between those embeddings as well.

We will give a detailed summary of the proof of the first part of Lemma 4.15, because it is stated in Starbird's paper but not all details of the proof are supplied. The main idea for the proof is the following "fundamental extension lemma" enabling to extend an isotopy of a complex to an isotopy of a complex with tetrahedral boundary containing this complex. It is proved in [15, Theorem 3.3]; we rephrase it here for convenience in our framework (it holds in fact in arbitrary dimension):

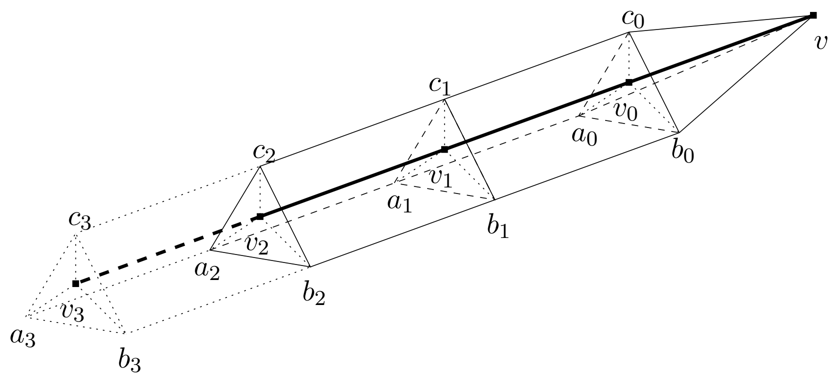


Figure 4.12: How an edge vw of C_1 (in bold) is protected by a skinny flexible tube. The vertices $v_0, \ldots, v_n$ are spread uniformly on the edge of C_1 which is considered, to make the edge flexible during the isotopy. An equilateral triangle $a_ib_ic_i$ is drawn around v_i, and the vertices of these triangles are linked as shown in the figure. Note the special treatment at the end of the edge (vertex v). The space between the triangles $a_ib_ic_i$ is also triangulated (not all edges are shown in the figure). Thus, a 3-dimensional simplicial complex protects each edge of C_1.

Lemma 4.16 *Let C be a simplicial 3-complex and $(h(t))$ be an isotopy of C into $\mathbf{R}^3$. Then there are a 3-complex with tetrahedral boundary $(\widetilde{C}, \widetilde{B}, \widetilde{b})$ so that $\widetilde{C}$ contains C and an isotopy $(\widetilde{h}(t))$ of $(\widetilde{C}, \widetilde{B}, \widetilde{b})$ into $\mathbf{R}^3$ extending $(h(t))$.*

We shall not give the proof here. The two key ingredients are that slightly perturbing an embedding still yields an embedding, and the use of refinements of triangulations in $\mathbf{R}^3$.

Proof of Lemma 4.15, first part. We first express the fact that it is possible to deform $f(C_1)$ to $g(C_1)$ if bending the edges is allowed: there is a refinement C_2 of C_1 (by adding vertices on the edges of C_1) and an isotopy $(h(t))$ of C_2 into $\mathbf{R}^3$ taking f_2 to g_2. Here, f_2 is to be understood in the following manner (and similarly for g_2): if v is a vertex in C_1, then $f_2(v) = f_1(v)$; and if an edge $e = vw$ of C_1 is subdivided with vertices $v_0, \ldots, v_n$ inserted on e, then $f_2(v_0), \ldots, f_2(v_n)$ are spread uniformly on $f_1(v)f_1(w)$. It is easy to see that this fact is true, as written in the paper, if you build a model of $f_2(C_2)$ with strings (or small bars) and deform it to $g_2(C_2)$.

No argument apart from the fact that such a deformation is possible is given in Starbird's paper to complete the proof. We thus suggest the following: In fact, we extend a bit more C_2 by protecting each edge of C_1 (split in C_2) by a 3-complex looking like a skinny tube (Figure 4.12). Define f_2 and g_2 naturally on these tubular protections; the images of f_2 and g_2 are just thickened versions of the images of f_1 and g_1. By Lemma 4.16, extend C_2 to a 3-complex with tetrahedral boundary (C_3, B_3, b_3), extending the isotopy $(h(t))$ to an isotopy $(\widetilde{h}(t))$ of (C_3, B_3, b_3). Now, considering $\widetilde{h}(0)$ and $\widetilde{h}(1)$, the complex (C_3, B_3, b_3) nearly satisfies the conditions required in the first part of Lemma 4.15, except that C_3 does not contain exactly C_1 because the edges of C_1 have been subdivided.

Thus, in f_3 and g_3, the only thing we have to do is to retriangulate compatibly the tubular protections of each (split) edge vw of C_1, removing the vertices $v_0, \dots, v_n$ splitting this edge and restoring the initial edge vw. Since the tubular protections of vw look alike under f_3 and g_3 (the v_i's are on a line, and similarly for the a_i's, b_i's and c_i's), this retriangulation is easy: the compatibility will be automatically satisfied. See [14, pp. 4–6] for similar retriangulation problems: first retriangulate the 2D region which is the convex hull of v, w, and the a_i's by removing the v_i's and linking each of the a_i's to v. Do the same with the b_i's and the c_i's. Now, we have to retriangulate three thirds of the tubular protection of edge vw. To retriangulate the region which is the convex hull of v, w, the a_i's and the b_i's, simply insert a new vertex p in the interior of this region; since its boundary is still triangulated, it is sufficient to insert in the complex the simplexes which are on the boundary of this region with p adjoined ("coning" the boundary of this region from p). Do the same for the other thirds. The resulting complex (C, B, b) and embeddings f and g satisfy the hypotheses. □

Proof of Theorem 4.14. First notice that, under f and g, all interior vertices are barycenter with positive coefficients of their adjacent vertices. For otherwise a vertex i would be on a face of the polytope generated by the neighbors of i, hence i would have no neighbor on a half-space whose boundary passes through the image of i; this contradicts the fact that i is a vertex interior to the triangulation. Let i be an interior vertex, and let λ^f_{ij} (resp. λ^g_{ij}) be the barycentric coefficients of i with respect to its neighbors j in the embedding f (resp. g). Note that the coefficients may be non-symmetric: we follow the approach of [73] to ensure we have positive coefficients. Then, for $t \in [0, 1]$, consider $\lambda^t_{ij} = (1-t)\lambda^f_{ij} + t\lambda^g_{ij} > 0$. Fix the positions p_i of the vertices $i \in B$, and look for the positions of the other vertices i satisfying the equations: $\sum_{j|ij\in E} \lambda^t_{ij}(p_j - p_i) = 0$, where E is the set of edges of C. This system admits a unique solution for each $t \in [0, 1]$ (exactly the same proof holds as in Section 4.5). Let us call the resulting family of mappings $(\bar{h}(t))$. By Lemma 4.15, second part, $(\bar{h}(t))$ cannot be an isotopy: there is a $t_0 \in [0, 1]$ such that $\bar{h}(t_0) = j$ is not an embedding. $(C, B, b), f$, and j satisfy the conditions of Theorem 4.14. □

This theorem is a counterexample to the generalization of Tutte's theorem in 3D, described in introduction. In fact, the result is slightly stronger: j is not an embedding, but even the restriction of j to the 1-skeleton of C is not an embedding (two edges must cross). This also implies that constructing isotopies of complexes in 3D is much more difficult than in 2D. Starbird [142, 143] showed the following theorem which might be a clue to find a solution: if there are two embeddings f and g of a complex K with tetrahedral boundary into $\mathbf{R}^3$ (or more generally if the boundary is a convex polyhedron), then there might be no isotopy from f to g, but there is always a suitable refinement K' of the complex K for which there is an isotopy between f and g. The problem is now to realize algorithmically the refinement and the isotopy; unfortunately, it is unclear how to proceed. Another track would be to try to find more restrictive conditions under which a barycentric method would work; for example, if some subcomplexes are forbidden, or if the complex is sufficiently refined, does Tutte's barycentric method always yield an embedding?

Recently, another counter-example for the analogue of Tutte's theorem in 3D has been described by Ó Dúnlaing [122].

4.4 Appendix: The strict convex hull

Recall that the strict convex hull of a set of points is the interior, in the space affinely generated by this set of points, of the convex hull of these points. The following lemma shows that conditions (ii) and (ii') are equivalent.

Lemma 4.17 *Let $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R}^d$. Then the strict convex hull of A is the set of barycenters with positive coefficients of the points in A.*

PROOF. Suppose $p \in \text{Str Conv } A$. Take $k \in \{1, \ldots, n\}$. There is an $\varepsilon_k > 0$ so that $p + \varepsilon_k(p - a_k) \in \text{Conv } A$. Therefore it is possible to write $p = \sum_{i=1}^n \mu_i^k a_i$, where $\sum_{i=1}^n \mu_i^k = 1$, $\mu_i^k \geq 0$ and $\mu_k^k > 0$. Taking $\lambda_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_i^k$ yields that p is a barycenter with positive coefficients of the points in A.

For the opposite inclusion, suppose $p = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$, with $\lambda_i > 0$ and $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. If $|\mu_1|, \ldots, |\mu_n|$ are sufficiently small, $p + \sum_{i=1}^n \mu_i(a_i - p)$ is in Conv A. This shows that $p \in$ Str Conv A. □

4.5 Appendix: Invertibility of System (S)

Lemma 4.18 *If the coefficients λ_{ij} are positive, System (S) admits a unique solution.*

Before showing this lemma, we must explicitely compute the entries of the matrix involved in System (S). For convenience, note $v_1, \ldots, v_m$ the interior vertices and $v_{m+1}, \ldots, v_n$ the exterior ones. The matrix involved in System (S) is square, of size m, and defined, if $1 \leq i, j \leq m$ and with the convention $\lambda_{ij} = 0$ if ij is not an edge, by:

$$m_{ij} = -\lambda_{ij}, \text{ if } i \neq j;$$

$$m_{ii} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik}.$$

Several proofs of this lemma exist in the literature. We first give the most straightforward proof in the general case. It uses the well-known "diagonal dominant property" of matrices and can be found in [72, p. 237].

PROOF. We show that the kernel of M is $\{0\}$. If $M \cdot y = 0$ for a column vector y with m entries, then: for each $i \in \{1, \ldots, m\}, \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(y_i - y_j) = 0$, where $y_j = 0$ if $j > m$ by definition. Consider an index i such that $|y_i|$ is maximal. As λ is positive, the preceding equation yields $y_j = y_i$ for every j neighbor of i. Because G is connected, and because $y_j = 0$ if $j > m$, we get $y_i = 0$. Therefore, M is invertible. (In fact, the same argument shows that M is symmetric definite positive, for it cannot have a nonpositive eigenvalue.) □

We now prove Lemma 4.18 in the special case where the coefficients are symmetric, using the physical interpretation with the springs. E_i denotes the set of interior edges.

PROOF. The energy of the system made of the springs is defined by

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{ij \in E_i} \lambda_{ij} |p_j - p_i|^2.$$

Consider that the positions of the exterior vertices are fixed; $\mathcal{E}(p_1, \ldots, p_m)$ is a polynomial function of degree two. If at least one interior vertex p_i goes to infinity, $\mathcal{E}$ tends to $+\infty$ by connectivity of G and positivity of the coefficients. Thus, the homogeneous polynomial of degree two in the coordinates $p_1, \ldots, p_m$ of $\mathcal{E}$ is a quadratic form which is symmetric definite positive. But the matrix of this quadratic form is exactly the matrix M, as it can be checked easily using the fact that the coefficients are symmetric. Thus M is symmetric definite positive and (S) admits a unique solution. □

Finally, we indicate that Lemma 4.18 is a consequence of the *matrix tree theorem* (see Brualdi and Ryser [23, p. 324], Chaiken [29], Orlin [123] or Zeilberger [157]), a theorem interpreting combinatorially the determinant of certain matrices in terms of arborescences of graphs.

PROOF. Let $(n_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq m+1}$ be real numbers. Consider the complete directed graph (without loops) $\bar{G}$ with $m+1$ vertices, each edge (ij) having, by definition, weight n_{ij}. Let P be the square matrix of size $m+1$ defined by:

$$p_{ij} = -n_{ij}, \text{ if } i \neq j;$$

$$p_{ii} = \sum_{k=1}^{m+1} n_{ik}.$$

The matrix P is called the *Laplacian matrix* of $\bar{G}$. A *spanning arborescence* of $\bar{G}$ rooted at i is a subgraph of $\bar{G}$ covering all vertices of $\bar{G}$ so that it has no directed cycle and all vertices $j \neq i$ have, in $\bar{G}$, outdegree equal to one. The *matrix tree theorem* asserts that the cofactor of the ith diagonal element of matrix P is exactly the sum, over all spanning arborescences of $\bar{G}$ rooted at i, of the product of the weights of the edges of this arborescence.

Apply this theorem to our particular case: let $n_{ij} = \lambda_{ij}$ if $1 \leq i \neq j \leq m$; if $i \leq m$, let $n_{i,m+1} = \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_{ik}$ and $n_{m+1,i} = 0$. The $(m+1)$th cofactor of P is exactly the determinant of the matrix M and also equals the sum, over all spanning arborescences of $\bar{G}$ rooted at vertex $m+1$, of the product of the weights of the edges of this arborescence. There is at least one spanning arborescence yielding a nonzero contribution to this sum: to see this, take a spanning tree of the graph induced by the inner vertices of G, and add one directed edge from a vertex in G which, in G, is linked to an exterior vertex, to vertex $m+1$. Since the weights of the edges are nonnegative, the contribution of any spanning arborescence is nonnegative, hence the cofactor is positive and M is invertible. □

4.6 Appendix: Counter-examples

We present here the data sets of embeddings which present a failure of the method presented in Section 4.2 (by lifting the embedding on the standard paraboloid to compute the initial weights, and then using linear interpolation between these weights and the unit weights).

The data format is as follows: each line corresponds to a vertex of the embedding, and contains, in this order, the vertex number, its x- and y-coordinates, and the list of its neighbors.

4.6.1 The smallest counter-example found

In this counter-example, the situation is close to a degeneracy, but one can check by numerical computation that this mapping is indeed an embedding, and that this does not yield an isotopy. It is made of four exterior vertices and two interior vertices.

```
1 -500 900 2 5 6 4
2 -850 900 1 3 5
3 -950 -900 4 6 5 2
4 0 -400 1 6 3
5 -900 -699 6 1 2 3
6 -800 -300 1 5 3 4
```

4.6.2 Counter-example presented in Figure 4.10

```
1 -681.67 314.31 5 2 8 6
2 -938.19 -391.67 7 8 1 3
3 419.75 -833.89 4 8 7 2
4 841.39 52.42 5 6 8 3
5 712.91 332.73 1 6 4
6 733.43 99.34 5 1 8 4
7 128.62 38.94 8 2 3
8 277.47 156.82 1 2 7 3 4 6
```

4.7 Appendix: Coordinates for Starbird's embeddings

We present here two data sets in OOGL format (to be viewed for example with Geomview[1]), which are Starbird's embeddings presented in Figure 4.11. The format of the main part of each data set is as follows: each line denotes a vertex, with its x-, y- and z-coordinates. Each pair of lines denotes an edge.

[1] http://www.geomview.org

First embedding:

```
VECT

17 34 17
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 2 2 2
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1
####################
# Center part

0   -20 0   # 7
-4  20  0   # 5

-4  20  0   # 5
4   20  0   # 6

4   20  0   # 6
0   -20 0   # 7

# Upper part

4   20  0   # 6
-6  0   16  # '4

-6  0   16  # '4
-16 -6  14  # '3

-16 -6  14  # '3
2   6   8   # '2
2   6   8   # '2
-10 6   20  # '1

-10 6   20  # '1
0   -20 0   # 7

-10  6  20  # '1
0    -12 0  # 8

-4  20  0   # 5
-6  0   16  # '4

# Lower part (symm.
# in Z of upper part)

4   20  0   # 6
-6  0   -16 # 4

-6  0   -16 # 4
-16 -6  -14 # 3

-16 -6  -14 # 3
2   6   -8  # 2

2   6   -8  # 2
-10 6   -20 # 1

-10 6   -20 # 1
0   -20 0   # 7

-10  6   -20# 1
0    -12 0  # 8

-4  20  0   # 5
-6  0   -16 # 4
####################
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
```

Second embedding:

```
VECT

17 34 17
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 2 2 2
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1
####################
# Center part

0   -20 0   # 7
-4  20  0   # 5

-4  20  0   # 5
4   20  0   # 6

4   20  0   # 6
0   -20 0   # 7

# Upper part

4   20  0   # 6
-6  0   24  # '4

-6  0   24  # '4
-16 -6  21  # '3

-16 -6  21  # '3
2   6   12  # '2

2   6   12  # '2
-10 6   30  # '1

-10 6   30  # '1
0   -20 0   # 7

-10  6  30  # '1
0    -12 0  # 8

-4  20  0   # 5
-6  0   24  # '4

# Lower part (symm.
# in X, shrink in Z
# of upper part)

-4  20  0   # 6
6   0   8   # 4

6   0   8   # 4
16  -6  7   # 3

16  -6  7   # 3
-2  6   4   # 2

-2  6   4   # 2
10  6   10  # 1

10  6   10  # 1
0   -20 0   # 7

10   6   10 # 1
0    -12 0  # 8

4   20  0   # 5
6   0   8   # 4
####################
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
1 0 0 1
```

Chapitre 5

Triangulations de Delaunay conformes 3D

Ce chapitre reprend l'article [38], écrit avec D. Cohen-Steiner et M. Yvinec, avec de très légères modifications.

Résumé. Nous décrivons un algorithme qui, étant donné un complexe affine par morceaux tridimensionnel, construit une triangulation de Delaunay conforme de ce complexe.

L'algorithme a été programmé, et donne en pratique un nombre de points de Steiner relativement petit, en s'adaptant à la géométrie locale du complexe. C'est, à notre connaissance, le premier algorithme pratique consacré à ce problème.

Introduction

In the following, the term *faces* denotes objects in 3D space which are either 0-dimensional faces called vertices, 1-dimensional faces called edges or 2-dimensional faces called 2-faces. The vertices are just points, the edges are straight line segments, and the 2-faces are polygonal regions possibly with holes and isolated edges or vertices included in their interior. A piecewise linear complex, called for short PLC, is a finite set $\mathcal{C}$ of faces such that:

- the boundary of any face of $\mathcal{C}$ is a union of faces of $\mathcal{C}$;
- the intersection of any two faces of $\mathcal{C}$ is either empty or a union of faces of $\mathcal{C}$.

A triangulation $\mathcal{T}$ is said to *conform* to a PLC $\mathcal{C}$ if any face of $\mathcal{C}$ is a union of faces of $\mathcal{T}$. In this chapter, we propose an algorithm which, given a PLC $\mathcal{C}$, finds a set of points $\mathcal{P}$ whose Delaunay triangulation conforms to $\mathcal{C}$. The set $\mathcal{P}$ includes the vertices of $\mathcal{C}$ and a certain number of additional points which are usually called Steiner points.

This question is motivated by problems in mesh generation and geometric modeling: in these fields, it is crucial to decompose the space into a set of simplices which conforms to a given PLC, with the additional restriction that the shape of the cells must satisfy certain properties. Delaunay triangulations present several features (see, *e.g.*, [19]) which can be exploited to solve this problem, and many mesh generation algorithms make use of this concept.

The problem of computing a conforming 2D Delaunay triangulation was solved by Saalfeld [133] and Edelsbrunner and Tan [64]. The algorithm by Edelsbrunner and Tan [64] guarantees an $O(n^3)$ bound on the number of generated Steiner vertices, if n is the size of the input. Most of the further works on the subject are based on the Delaunay refinement approach pioneered by Ruppert [132] and Chew [32]. Shewchuk [140] gave an algorithm in 3D which builds a conforming Delaunay triangulation under restrictive conditions on the angles of the PLC. Murphy, Mount, and Gable [119] found a solution which works under no restriction, but, as written in the conclusion of their paper, produces far too many points in practice. The main interest of their paper is to show the existence of a conforming Delaunay triangulation with a finite set of vertices for any 3D PLC.

Our algorithm uses the Delaunay refinement approach. Initially, the set $\mathcal{P}$ is the set of vertices of the complex $\mathcal{C}$. Points are then added to $\mathcal{P}$ until each edge and each face of the complex $\mathcal{C}$ is a union of simplices which are in the Delaunay triangulation of $\mathcal{P}$.

The main difficulty with such a strategy is to ensure termination. Indeed, it is known that sharp edges and corners may induce cascading additions of Steiner points. To avoid this effect, we first define a protected area around edges and vertices of the PLC with a special refinement process. Outside the protected area, the PLC can be refined using Ruppert's process and the interaction between refinements in both areas can be controlled. Murphy, Mount, and Gable use a similar approach, but do not take into account the local geometry of the complex: the existence of a pair of vertices or a vertex and a non-incident edge very close together implies a high number of output vertices in the neighborhood of all edges of the input complex. The main difference between our approach and their work lies in the definition of the protected area: in our case, this area adapts to the local geometry of the input PLC, implying the creation of fewer points in practice.

The algorithm is presented in Section 5.1 and proved to be correct in Section 5.2. In Section 5.3, we present the details of the construction of the initial protected area, skipped in Section 5.1. Section 5.4 presents some refinements to improve the running time of the algorithm and to lower the number of vertices in the output conforming triangulation. At last, we end with experimental results in Section 5.5.

5.1 The algorithm

After a few definitions, we describe the protected area (Subsections 5.1.2 and 5.1.3). We then define the refinement process used for this area (Subsections 5.1.4 and 5.1.5). Finally, we describe the main procedure and summarize the whole algorithm.

5.1.1 Definitions and notations

The *circumball* of a segment ab is the ball admitting the segment ab as diameter. The *circumball* of a triangle abc is the ball admitting the circumscribing circle of abc as great circle.

An edge (resp. a triangle) is said to have the *Gabriel property* if its circumball contains no point of $\mathcal{P}$ in its interior. A point in the interior of the circumball of an edge (resp. a triangle) is said to *encroach upon* this edge (resp. this triangle).

In the following, we note $\mathrm{bd}(B)$ the boundary of a ball B, $\mathrm{int}(B)$ the interior of B and $\mathrm{circum}(ab)$ (resp $\mathrm{circum}(abc)$) the circumball of the segment ab (resp. of the triangle abc).

5.1.2 Protecting balls

The *1-skeleton Sk* of the complex $\mathcal{C}$ is the union of the 0- and 1-dimensional faces of $\mathcal{C}$. The protected area is defined by means of a set $\mathcal{B}$ of closed balls, called protecting balls, satisfying the following requirements:

i. the union of the balls in $\mathcal{B}$ covers the 1-skeleton *Sk* of the complex $\mathcal{C}$;

ii. the balls are centered on points which are in *Sk*;

iii. if two balls intersect, their centers belong to the same edge of the complex $\mathcal{C}$;

iv. if a face of $\mathcal{C}$ intersects a ball, then it contains the center of this ball;

v. the intersection of any three balls in $\mathcal{B}$ is empty;

vi. any two balls are not tangent;

vii. the center of any ball is inside no other ball.

(i) and (iv) imply that any vertex in $\mathcal{C}$ is the center of a ball in $\mathcal{B}$. We show in Section 5.3 how to build a set of balls satisfying these requirements. Furthermore, in Section 5.4, we show that there is in fact no need to cover all the edges.

5.1.3 Center-points, h-points, p-points, and *SOS*-points

We describe here a few subsets of points, included in the balls of $\mathcal{B}$, that we need to add first in the set $\mathcal{P}$. See Figure 5.1.

Let B be a ball in $\mathcal{B}$ with center o. Let $\mathcal{B}_B$ be the set of balls in $\mathcal{B}$ that intersect B. By condition (v), the intersections of B with the elements of $\mathcal{B}_B$ are disjoint.

We first add the center o of B. Such a point will be called a *center-point*. Then, for each element B_i of $\mathcal{B}_B$, consider the radical plane of B and B_i. It intersects the line joining the centers of B and B_i at a point h_i, which is on an edge of $\mathcal{C}$ by condition (iii). The point h_i is added to the set $\mathcal{P}$. Such points will be called *h-points*.

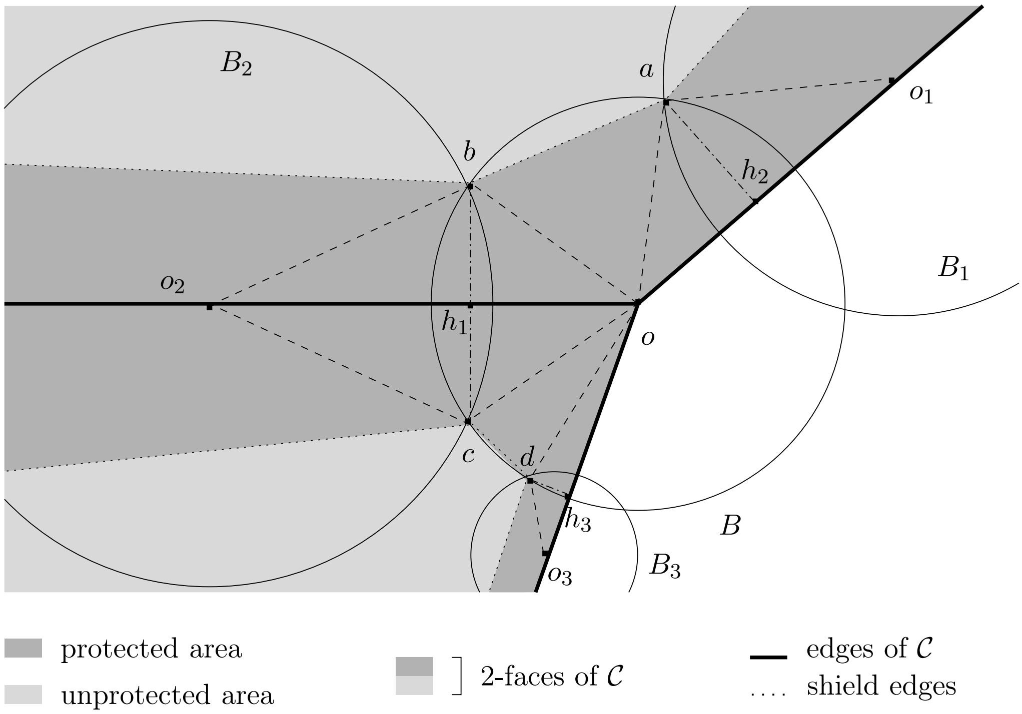


Figure 5.1: The situation in the neighborhood of a ball B, incident to three other balls B_1, B_2 and B_3. There are two faces in the complex, limited by three edges, in the plane of the figure. Point h_i is added on the radical plane of B and B_i. p-points a, b, c, and d belong to the boundary of two balls and to a face, they are therefore also inserted in $\mathcal{P}$. Incident to o are four right-angled triangles (*e.g.*, oh_2a) and two isosceles triangles (*e.g.*, oab). The shield edges are ab and cd.

By condition (iv), any face of $\mathcal{C}$ which intersects $B \cap B_i$ contains the centers of B and B_i, and thus can be either the edge including the segment oo_i (o_i is the center of B_i) or a 2-face incident this edge. For each 2-face F of $\mathcal{C}$ intersecting $B \cap B_i$, we add to $\mathcal{P}$ the intersection points of F with the circle $\text{bd}(B) \cap \text{bd}(B_i)$. We called those points *p-points*.

Consider the plane Q of a 2-face of $\mathcal{C}$ intersecting B (and thus containing o). The edges of $\mathcal{C}$ split the disk $Q \cap B$ into one or several sectors. We focus on sectors which are included in $\mathcal{C}$. The p-points further split these sectors in subsectors. We call *right-angled subsectors* the subsectors limited by an edge of $\mathcal{C}$ and a p-point and *isosceles subsectors* the subsectors limited by two p-points.

If some isosceles subsectors form an angle $\geq \pi/2$, we add some points on their bounding circular arcs to subdivide them in new subsectors forming an angle $< \pi/2$. For reasons that will be clear in Subsection 5.1.4, these points are called SOS-*points*. The new subsectors with angle $< \pi/2$ are still called *isosceles subsectors*.

Center-points and h-points are the only categories of points added in the interior of protecting balls. p-points and SOS-points lie on the boundaries of protecting balls. SOS-points belong to a single protecting ball while p-points belong to the intersection of two balls.

Isosceles subsectors are defined by the center o of a ball B and by two points a and b (either p-points or SOS-points) on $\text{bd}(B)$. Line segments such as ab, joining two points that define an isosceles subsector, are called *shield edges*. In the following, triangles defined by center-points and shield edges such as oab are referred to as *isosceles triangles*. Triangles spanned by a center-point, a h-point and a p-point on the boundary of some right-angled subsector are referred to as *right-angled triangles*.

Definition 5.1 *The* protected area *is the union of the isosceles and right-angled triangles. See the dark gray area in Figure 5.1. In particular, the protected area is included in the union of the protecting balls.*

Definition 5.2 *The* unprotected area *is the complex $\mathcal{C}$, minus the protected area.*

5.1.4 The "split-on-a-sphere" strategy

During the process, it will be necessary to split shield edges. Since we do not want to add more points inside the balls in $\mathcal{B}$, we use a special treatment to split such a shield edge, called the "split-on-a-sphere" strategy (SOS for short). See Figure 5.2.

Let ab be a shield edge to be split, in a ball B. We distinguish two cases: a and b are both SOS-points and belong to a single ball B, or at least one of these two points (for example a) is a p-point and belongs also to another ball B'.

If a and b belong only to B, let c be the midpoint of the shortest geodesic arc ab on $\text{bd}(B)$. To refine edge ab, we add c to $\mathcal{P}$ and replace the shield edge ab by two shield edges ac and cb.

If a is a p-point belonging to $\text{bd}(B) \cap \text{bd}(B')$, the idea is quite similar; however, if we do not take care, the SOS strategy could lead to cascading insertions of

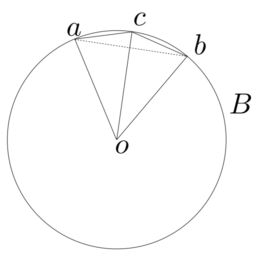


Figure 5.2: The SOS strategy: We split the shield edge ab by inserting the point c on the boundary of the ball.

points, because refining an edge on B would lead to refinement of an edge on B', and so on. We thus use a strategy "à la Ruppert" [132], using circular shells. We consider the length of the segment ab, divided by two, and round it to the nearest distance d which is of the form $2^k, k \in \mathbf{Z}$ (the unit distance has been chosen arbitrarily at the beginning of the algorithm). Let c be the point of the shortest geodesic arc ab on $\mathrm{bd}(B)$ at distance d from a. We split the shield edge ab using the point c.

In both cases, the added point c belongs to the category of SOS-points. Note that, due to the SOS refinement strategy, the protected and unprotected areas, still defined as in Subsection 5.1.3, will slightly evolve during the algorithm. Each SOS refinement increases the protected area and decreases the unprotected area.

5.1.5 The protection procedure

This procedure adds some points to set $\mathcal{P}$ to ensure that shield edges and isosceles triangles have the Gabriel property. It uses recursively the SOS strategy and works as follows: While there is an encroached shield edge ab or an encroached isosceles triangle oab, refine the edge ab using the SOS strategy.

5.1.6 The whole algorithm

Let us recall that the algorithm works by adding points to set $\mathcal{P}$. We note $Dt_3(\mathcal{P})$ the 3D Delaunay triangulation of points in $\mathcal{P}$. For each plane Q of a 2-face in $\mathcal{C}$, we note $Dt_2(\mathcal{P} \cap Q)$ the 2D Delaunay triangulation of points in $\mathcal{P} \cap Q$. These triangulations are updated upon each insertion of a point in $\mathcal{P}$.

The algorithm performs the initialization step and the main procedure described below.

The Initialization Step:

- Construct and initialize the protected area (as described in 5.1.2 and 5.1.3);
- execute the protection procedure.

We will see later that the Delaunay triangulation of $\mathcal{P}$ conforms to the part of $\mathcal{C}$ which is inside the protected area. Because the algorithm maintains the Gabriel property of shield edges, in each plane Q of a 2-face F of $\mathcal{C}$, the 2D triangulation $Dt_2(\mathcal{P} \cap Q)$ conforms to the shield edges in this plane and thus to the unprotected part F_u of F. The main procedure ensures that the triangles of $Dt_2(\mathcal{P} \cap Q)$ included in F_u appear in the 3D triangulation $Dt_3(\mathcal{P})$.

The Main Procedure:
The Main Procedure consists in executing the following loop: While there is a triangle T in the 2D Delaunay triangulation $Dt_2(\mathcal{P} \cap Q)$ of the plane Q of a 2-face F of $\mathcal{C}$ such that:

a. T is included in the unprotected part F_u of F,

b. T does not appear in $Dt_3(\mathcal{P})$,

refine T trying to insert its circumcenter c, that is:

- if c encroaches upon no shield edge, insert it;
- otherwise, split all the shield edges encroached upon by c using the SOS strategy, and then execute the protection procedure.

5.2 Proof of the algorithm

Two steps are involved for the proof of this algorithm. First, we prove invariants of the algorithm concerning the positions of the points added and the Gabriel property of some triangles and edges. After that, we are able to prove termination.

5.2.1 Properties maintained in the algorithm

Lemma 5.3 *At the beginning (and the end) of each execution of the main loop, the shield edges have the Gabriel property.*

Proof. Indeed, this is true before the first execution of the main loop, because the protection procedure, which has just been executed, ensures this property; for the same reason, this also holds after an execution of the loop leading to the split of shield edges. At last, a circumcenter is inserted in $\mathcal{P}$ only if it does not violate this property. □

In the following, we define an *added* circumcenter to be a circumcenter inserted in the set $\mathcal{P}$, and a *rejected* circumcenter to be a circumcenter considered in the algorithm but not inserted because it encroaches upon some shield edge.

Lemma 5.4 *Any circumcenter (added or rejected) considered by the algorithm lies in the unprotected area, outside the protecting spheres. In particular, no point is added inside the protecting spheres after the initialization step, and $\mathcal{P}$ is included in $\mathcal{C}$.*

Proof. Let T be a triangle whose circumcenter is considered at some step of the algorithm. T lies in the unprotected area, and belongs to the 2D Delaunay triangulation $Dt_2(\mathcal{P} \cap Q)$ of the plane Q of some 2-face in $\mathcal{C}$. Let p be the

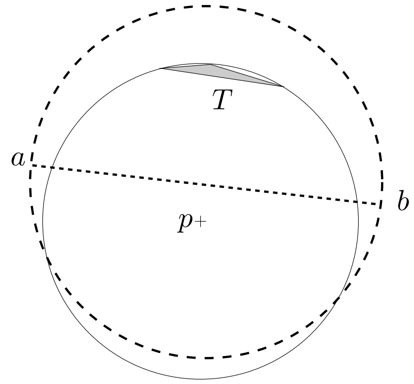


Figure 5.3: The circumcenter p of a triangle T lies in the unprotected area.

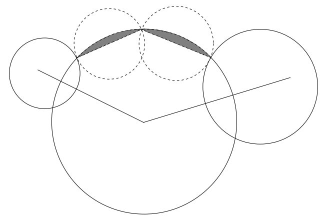


Figure 5.4: The intersection of the unprotected area with the union of protecting balls is included in the circumballs of shield edges.

circumcenter of T. Assume for contradiction that p lies outside the unprotected area. Let m be a point in T. Since shield edges enclose the connected component of the unprotected area which contains T, the segment pm must intersect a shield edge ab. The vertices a and b cannot be inside circum(T) because T belongs to $Dt_2(\mathcal{P} \cap Q)$. Hence (Figure 5.3), triangle T belongs to the circumball of ab, which is impossible by Lemma 5.3.

Moreover, since the circumballs of shield edges cover the intersection of the unprotected area with the protecting balls (see Figure 5.4), any added circumcenter is actually outside the protecting spheres. □

Proposition 5.5 *At the beginning (and the end) of each execution of the main loop, the isosceles triangles have the Gabriel property.*

Proof. The proposition is obvious after the initialization step because the protection procedure is called and enforces the Gabriel property of isosceles triangles. For the same reason, it is also the case when a circumcenter has just been rejected because it encroaches upon some shield edge.

It remains to see that this proposition is still true when a circumcenter has just been inserted: such a circumcenter lies outside the protecting spheres (by Lemma 5.4) and outside the circumball of any shield edge (otherwise it is not inserted in $\mathcal{P}$). Let ab be such a shield edge, belonging to ball B. We note that the boundaries of B, circum(ab), and circum(oab) belong to a pencil of spheres.

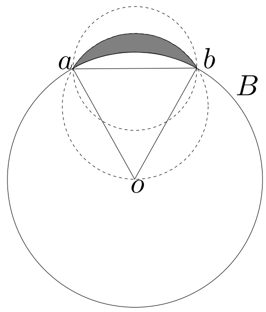


Figure 5.5: The balls B, circum(oab), and circum(ab).

Because the angle $\widehat{aob}$ is smaller than $\pi/2$, we have circum(oab) $\subset$ circum(ab) $\cup B$ (Figure 5.5). The result follows. □

Lemma 5.6 *Let B be a ball with center o, and p be a point on the boundary of B. If, at some stage of the algorithm, the segment op is encroached upon, the encroaching point is a h-point h_i on the radical plane of B and B_i, and p belongs to* $\mathrm{bd}(B) \cap \mathrm{int}(B_i)$.

PROOF. The circumball of op is inside B. Therefore, op can only be encroached upon by a vertex in this ball, and not by the center of B, hence only by a h-vertex in B. Suppose that op is encroached upon by a vertex h_i, belonging to B and B_i. The encroachment condition can be rewritten $\widehat{oh_ip} > \pi/2$. Because points q in $\mathrm{bd}(B)$ that satisfy $\widehat{oh_iq} > \pi/2$ lie in $\mathrm{bd}(B) \cap \mathrm{int}(B_i)$, p belongs to $\mathrm{int}(B_i)$. □

Proposition 5.7 *At each stage of the algorithm, the right-angled triangles have the Gabriel property.*

PROOF. Suppose that a right-angled triangle oh_jp does not have the Gabriel property at some stage of the algorithm: h_j is on the radical plane between B and B_j, and p is on the boundary of B and B_j. Because the circumball of oh_jp is the circumball of op, by Lemma 5.6, the encroching point is a h-point, and p has to belong to the interior of a third ball B_i, which is impossible by condition (v). □

Center points and h-points cut the edges of $\mathcal{C}$ in subedges. Note that Proposition 5.7 implies that these subedges are edges of $Dt_3(\mathcal{P})$.

5.2.2 Termination proof

Proposition 5.8 *The protection procedure always terminates.*

The proof is a straightforward consequence of the following lemma.

Lemma 5.9 *For each call to the protection procedure, there exists $\theta > 0$ such that no isosceles triangle with angle at the center of the ball less than θ will be split.*

Proof. Let oab be an isosceles triangle with shield edge ab in a protecting ball B. We consider in turn three kinds of possible encroaching points: points on the boundary of B (case 1), points in the interior of B (case 2), and points outside B (case 3). In each case k, we prove the existence of a value θ_k, such that neither oab nor ab can be encroached upon by a point of type k if $\widehat{aob} < \theta_k$.

Recall that the three balls B, circum(ab) and circum(oab) belong to a pencil of spheres. Because the angle $\widehat{aob}$ is smaller than $\pi/2$, we have circum$(oab) \subset B \cup$ circum(ab) and circum$(ab) \cap B \subset$ circum(oab) (see Figure 5.5). Therefore, it is enough to check that points on the boundary of B or outside B (cases 1 and 3) do not encroach upon ab and that points in B (case 2) do not encroach upon oab.

1. For a plane Q of a 2-face of $\mathcal{C}$ intersecting B, we consider the circle bounding $B \cap Q$ and we denote by $S(Q, B)$ the union of arcs on this circle spanned by the isosceles triangles in Q. Notice that all the SOS-points inserted on B are located on such a set $S(Q, B)$.

   If Q is the plane containing oab, no point of $S(Q, B)$ encroaches upon ab. If Q' is another plane, the distance between $S(Q, B)$ and $S(Q', B)$ is strictly positive, so there is a value $\theta_1(B, Q, Q')$ such that ab is not encroached upon by a point on $S(Q', B)$ if $\widehat{aob} < \theta_1$. Setting $\theta_1 = \min\{\theta_1(B, Q, Q')\}$ achieves the proof of case 1.

2. The only points in a ball B which can encroach upon an isosceles triangle oab in B are the h-points in B. Suppose that a point h_i (on the radical plane of B and B_i) encroaches upon oab.

   If h_i is in the plane Q of oab, we prove that encroachment is not possible. Indeed, if h_i encroaches upon oab, h_i encroaches either upon oa or upon ob. Thus a or b would belong to $\mathrm{bd}(B) \cap \mathrm{int}(B_i)$, by Lemma 5.6, which is impossible because a and b are either p-points or SOS-points.

   Let us now deal with the case where h_i does not belong to the plane Q. Let $c \in S(Q, B)$; c does not belong to B_i, for otherwise h_i would belong to Q. Let us prove that h_i is not in the closed ball circum(oc). If h_i is in the interior of circum(oc), this means that oc is encroached upon by h_i, hence, by Lemma 5.6, c belongs to $\mathrm{int}(B_i)$, which is not the case. Similarly, if h_i is on the boundary of circum(oc), c belongs to B_i.

   Hence, the distance between h_i and the ball circum(oc) is strictly positive. Let $\delta(B, Q, h_i)$ be the minimum (strictly positive) of this distance for $c \in S(Q, B)$. Let $\delta'(B, \theta)$ be the Hausdorff distance between circum(oc) and circum$(oa'b')$ where $oa'b'$ is an isosceles triangle with a' and b' on $\mathrm{bd}(B)$, axis oc and $\widehat{a'ob'} = \theta$. As $\delta'(B, \theta)$ goes to 0 when θ goes to 0, there exists $\theta_2(B, Q, h_i)$ such that $\delta'(B, \theta) < \delta(B, Q, h_i)$ for any $\theta \le \theta_2(B, Q, h_i)$. It follows that oab cannot be encroached upon by h_i if $\widehat{aob} < \theta_2(B, Q, h_i)$. Setting $\theta_2 = \min\{\theta_2(B, Q, h_i)\}$ achieves the proof of case 2.

3. Consider now the case where edge ab is encroached upon by a point p outside the ball B. At each call of the protection procedure, the set of points outside the protecting spheres is fixed. Also, the distance between two sets

$S(Q_1, B_1)$ and $S(Q_2, B_2)$ which do not share a p-point is bounded from below. Thus, there is a value θ'_3 such that, if $\widehat{aob} < \theta'_3$, edge ab cannot be encroached upon by p except if p belongs to $S(Q, B')$ where Q is the plane of oab and B' intersects B. Therefore, the only case remaining to be considered is the case where a is a p-point in $Q \cap \mathrm{bd}(B) \cap \mathrm{bd}(B')$ and ab is encroached upon by a point p of $S(Q, B')$. However, in this case, we split edges incident to a using circular shells. Hence, after a few splits, the edges incident to a will have the same lengths and will be unable to encroach upon each other. Therefore, we get a value $\theta_3 \leq \theta'_3$ satisfying the desired requirement.

□

Theorem 5.10 *The algorithm terminates, and, once it is the case, the Delaunay triangulation of $\mathcal{P}$ conforms to the complex $\mathcal{C}$.*

Proof. It is sufficient to prove that the main procedure terminates: indeed, once it is the case, Propositions 5.5 and 5.7 show that the Delaunay triangulation of $\mathcal{P}$ conforms to the protected area of $\mathcal{C}$, and the fact that the algorithm ends precisely means that the Delaunay triangulation of $\mathcal{P}$ also conforms to the unprotected area of $\mathcal{C}$. We prove the termination of the main procedure by proving first that the number of added circumcenters is finite and second that the number of shield edges encroached upon by rejected circumcenters is finite. Because the protection procedure is already known to terminate, these two facts imply the termination of the main procedure.

By construction of the protecting spheres, the unprotected area is a disjoint union of plane regions. Let F_u be such a region. As previously noticed, owing to the SOS strategy, these unprotected regions slightly evolve during the algorithm; however, they are always shrinking. Consequently, the distance between F_u and the other regions as well as the distance between F_u and the set of center-points and h-points added in the interior of the protecting balls can be bounded from below by a constant δ_F. Let T be a triangle in F_u whose circumcenter has to be inserted in $\mathcal{P}$ and let C_T be the circumcircle of T. As T does not belong to $Dt_3(\mathcal{P})$, its circumball circum(T) contains a point in $\mathcal{P}$ which is not in the plane of F_u. Such a point can be inside a protecting ball (a center-point or a h-point), on the boundary of a protecting ball (and thus on the boundary of another region), or an added circumcenter (in another region by Lemma 5.4). Therefore circum(T) either contains a point added in the interior of a protecting sphere or intersects another unprotected region, and the radius of C_T is thus larger than δ_F. Because T belongs to the 2D Delaunay triangulation in the plane of F_u, C_T encloses no point of $\mathcal{P}$. The area of F_u being finite, this shows that the number of added circumcenters is bounded.

Let us now show that the total number of edges encroached upon by rejected circumcenters is finite. For this purpose, consider a shield edge encroached upon by the center p of a circumcircle C in a region F_u. C being empty and of radius

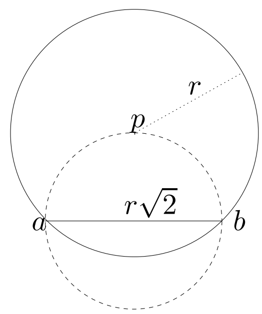


Figure 5.6: The shortest shield edge ab which may be encroached upon by a rejected circumcenter p.

larger than δ_F, it is easy to show that the shield edge has length at least $\delta_F\sqrt{2}$ (see Figure 5.6). Thus the number of those edges is finite. □

5.3 Construction of the protecting balls

We have to build the set $\mathcal{B}$ of protecting balls satisfying the conditions described in Subsection 5.1.2. The efficiency of the algorithm really depends on this construction: the less balls there are, the less points will be produced in $\mathcal{P}$.

Definition 5.11 *Let $\mathcal{C}$ be a PLC. The* local feature size *of a point p with respect to $\mathcal{C}$ is the distance between p and the union of faces of $\mathcal{C}$ that do not contain p.*

Let $lfs(p)$ denote the local feature size of point p with respect to the PLC which is given as input of the algorithm. We address the following construction of the enclosing balls. Let α be a real, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ (typically $\alpha = 0.4$).

First, for each vertex v of the PLC, construct a ball of radius $\alpha \cdot lfs(v)$.

Then, on each edge e, do the following. While e is not completely covered by balls, consider a maximal open line segment a_1a_2 in e and outside the union of the balls in the current set $\mathcal{B}$. Point a_i $(i = 1, 2)$ is an intersection of ball B_i (with center o_i and radius r_i) with edge e. We will insert a ball between B_1 and B_2. Let o be the midpoint of a_1a_2. Insert a new ball B in $\mathcal{B}$, of center o and radius r, with:

$$r = \min\left\{\alpha \cdot lfs(o), oa_1 + \frac{r_1}{2}, oa_2 + \frac{r_2}{2}\right\}.$$

To ensure condition (vi), if $r = oa_1$, we replace r by $(1-\varepsilon)r$ where ε is a small positive constant.

Lemma 5.12 *This construction terminates.*

Proof. Consider an edge e, whose vertices have just been protected by two spheres. Let A be the union of the (open) line segments which are in e minus the union of the current set of balls. Call A_0 the set A just after the protection of the endpoints of e. The distance $d = \min\{lfs(p)|\ p \in \overline{A_0}\}$ is strictly positive (the lfs

function is continuous on $\overline{A_0}$, and *lfs* does not vanish on $\overline{A_0}$). The insertion of a new ball:

- either increases by one the number of connected components of A and decreases the measure of A by at least $2(1-\varepsilon)\cdot\alpha\cdot d$ (hence this case can happen only a finite number of times),
- or decreases by one the number of connected components of A (without increasing the measure of A).

The result follows. □

Conditions (i), (ii), (iv), (vi) and (vii) are obviously satisfied. (iii) follows from the fact that if two points o and o' do not belong to the same edge, oo' is larger than or equal to $lfs(o)$ and $lfs(o')$. If two balls B and B', centered at o and o' with radii r and r', are in $\mathcal{B}$, then $r < \frac{1}{2}lfs(o)$ and similarly for r'. Thus $r + r' < oo'$, hence the balls cannot intersect.

(v) is also true. Indeed, if three balls intersect, their centers must be vertices of a triangle in $\mathcal{C}$. But it follows from our construction that two balls centered on vertices of the PLC cannot intersect because $\alpha < \frac{1}{2}$.

Hence we have:

Proposition 5.13 *This construction of $\mathcal{B}$ is correct.*

5.4 Improvements

5.4.1 Speeding up the protection procedure

The following proposition shows that when the protection procedure is called from the main procedure, there is no need to check whether isosceles triangles have the Gabriel property.

Proposition 5.14 *After the initialization process, enforcing Gabriel property for shield edges in the protection procedure is enough to ensure Gabriel property for isosceles triangles.*

Proof. Upon termination of the initialization step, all isosceles triangles have the Gabriel property. Suppose that, at some stage of the algorithm, a point encroaches upon some isosceles triangle oab without encroaching ab. Let B be the ball containing oab. Since circum(oab) is included in the union of B and circum(ab) (Figure 5.5), the encroaching point must be inside B.

Hence it is sufficient to show that no isosceles triangle is encroached upon by a vertex inside its protecting ball during the algorithm. By contradiction, let $T = oab$ be the first isosceles triangle encroached upon by a vertex in B. Since no point is inserted inside the balls during the main procedure, T must be a triangle which results from the splitting of some triangle $T' = oac$. The encroaching point can thus only be a h-point h_i lying inside B. Arguing that circum(oab), circum(oac), and circum(oa) belong to a sphere pencil and comparing their radii,

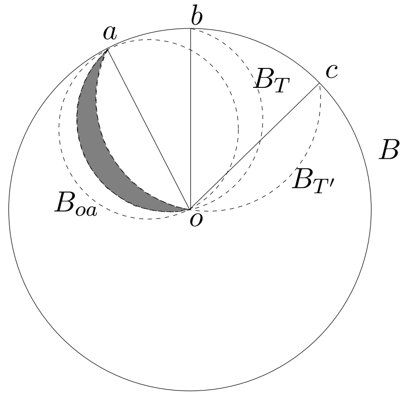


Figure 5.7: $\text{circum}(oab) \subset \text{circum}(oac) \cup \text{circum}(oa)$.

we deduce (Figure 5.7) that $\text{circum}(oab) \subset \text{circum}(oac) \cup \text{circum}(oa)$. However, h_i does not belong to $\text{circum}(oac)$ because $T' = oac$ was not encroached upon by h_i, nor to $\text{circum}(oa)$ (by Lemma 5.6). Therefore h_i does not belong to $\text{circum}(oab)$, which yields the contradiction. □

5.4.2 Restricting the area where balls are required

In 5.1.2, the set $\mathcal{B}$ is constructed so that the balls cover the whole 1-skeleton Sk of $\mathcal{C}$. We explain here that this is not always necessary. Indeed, the balls are introduced to avoid troubles with small angles; they are thus not required at places where faces intersect with an angle large enough. This remark enables to put less balls in $\mathcal{B}$, hence to reduce the size of the output $\mathcal{P}$. We first describe the modification in the construction of the balls, and then prove that, despite this slight modification, the algorithm is still correct.

Let $e = o_1o_2$ be an edge of the PLC so that all angles between faces incident to e are $\geq \pi/2$. We modify the algorithm in the following way. Still construct balls B_1 and B_2 centered at the vertices o_1 and o_2. In $\mathcal{P}$, insert o_1, o_2, and the two intersections p_1 and p_2 of e with the boundaries of B_1 and B_2.

Consider p_1p_2 as a shield edge in the main procedure. In other words, whenever this edge would be encroached upon by the insertion of a point in $\mathcal{P}$, split this edge in the middle, to keep it protected at each stage of the algorithm. The original edge of $\mathcal{C}$ is thus not in the protected area, but the process is exactly like in the standard algorithm.

There are only minor modifications for the proof of the algorithm. The unprotected area is still bounded with shield edges. The proof of termination of the protection procedure is analogous: Lemma 5.9 can be adapted without difficulty to show that there also exists a length $\delta > 0$ such that the protection procedure never splits a shield edge which is a part of an edge and with length less than δ. The only difficulty is to show the following proposition.

Proposition 5.15 *The modified version of the main procedure always terminates.*

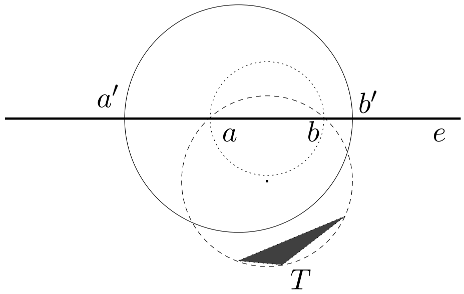


Figure 5.8: In the half-space H^+ (above the edge e in the figure), the part of circum(T) is included in the part of circum(ab) which is, in turn, contained in the part of circum$(a'b')$.

PROOF. Let F_u be a region, in a plane Q, incident to edge e. The distance between F_u and the regions non-incident to e as well as the distance between F_u and the set of center-points and h-points outside Q can be bounded from below by a constant $\delta_F > 0$. Let p be the circumcenter of a triangle T in F_u, added to $\mathcal{P}$. We will show that the circumball of T cannot contain a vertex of another face incident to e, which implies that the radius of this circumball is larger than δ_F, like in the proof of Theorem 5.10.

Suppose for contradiction that T is encroached upon by a point p' of $\mathcal{P}$ on a face incident to e. Necessarily, because the angles of the faces of $\mathcal{C}$ are obtuse at e, the circumball of T must intersect e. Let a and b be the intersection points of the boundary of circum(T) with e. Let $a'b'$ be the unique shield edge included in e which is intersected by circum(T). (The uniqueness follows from the fact that points in $\mathcal{P}$, like a' and b', cannot lie in circum(T).) Let H be the plane orthogonal to F_u and containing e, and H^+ be the half-space bounded by H and not containing T. Clearly, circum$(T)\cap H^+ \subseteq$ circum$(ab)\cap H^+ \subseteq$ circum$(a'b')\cap H^+$ (see Figure 5.8). The point p' is in circum$(T) \cap H^+$, hence in circum$(a'b')$, which means that p' encroaches upon the shield edge $a'b'$ and yields the contradiction.

The remaining part of the proof of termination of the main procedure is exactly the same as in the proof of Theorem 5.10. $\square$

5.5 Experimental results

The algorithm has been implemented and tested using the Computational Geometry Algorithms Library CGAL[1]. Results for several models are displayed in Figures 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, and 5.13.

Figure 5.9 gives for each model, the number of vertices of the input PLC (*nb input vertices*), the number of 2-faces to which the Delaunay triangulation of input vertices does not conform (*non Delaunay faces*), and the number of vertices of the conforming output triangulation (*nb output vertices*). In those examples and in most cases, the number of vertices in the output conforming triangulation

[1] `http://www.cgal.org/`

	geological data	triceratops	umbrella
nb input vertices	7,566	2,832	16
nb non Delaunay faces	1,045	2,194	5
nb output vertices	25,793	27,947	122
running time (s)	83	570	0.7

Figure 5.9: Experimental data.

and the number of input vertices are in a ratio comprised between 3 to 1 and 10 to 1.

The running times, measured on a PC with 500Mhz processor, do not include the computations of local feature size values, because the current implementation uses a very slow brute force algorithm for it. We are currently designing a data structure devoted to speed up these computations.

Conclusion

We have presented an algorithm for computing a conforming Delaunay triangulation of any three-dimensional piecewise linear complex. The most important innovation, compared to the paper by Murphy et al. [119], is to enclose critical places by balls whose radii fit the local complexity of the complex, with the use of the local feature size. Our experimental results show that it is valuable in practice. The algorithm could be easily modified to guarantee in the resulting mesh the Gabriel property for any triangle included in a constraint. The next step currently under work is to investigate how conforming meshes with guarantees on the shape and size of the elements can be obtained. Several questions remain open: we did not try to find the time complexity of our algorithm. It would also be interesting, as in [64] in the plane, to find a bound on the output depending on the size of the initial complex and/or (like in [132]) the *lfs* function. Even from a theoretical point of view (see [61, p. 171]), no nice upper bound is known for the size of a conforming Delaunay triangulation in terms of the size of the input complex and the *lfs* function.

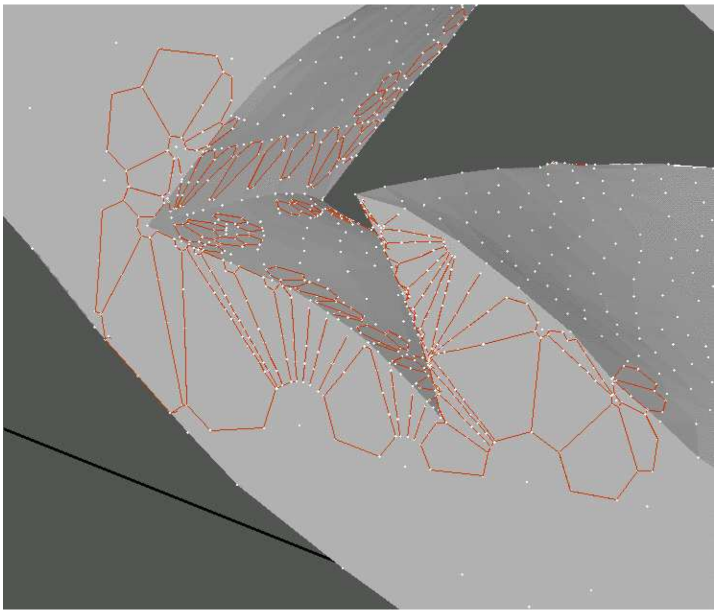


Figure 5.10: Detail of a geological formation (Courtesy of T-surf and Mr. Reinsdorff). Solid line segments stand for shield edges.

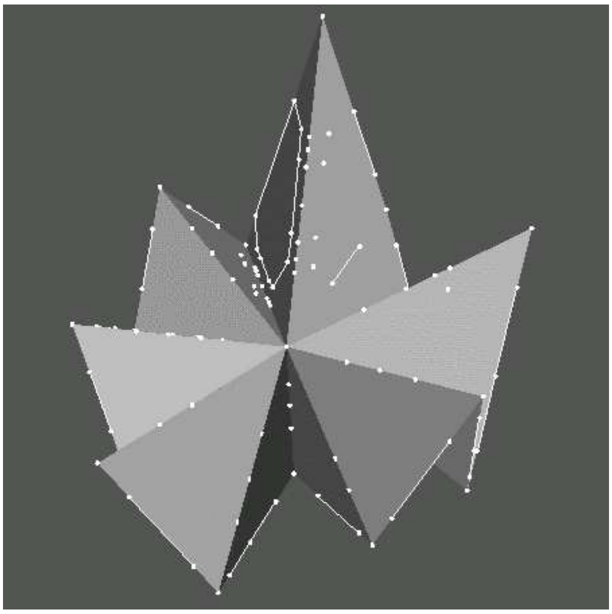


Figure 5.11: Umbrella. Solid line segments stand for shield edges.

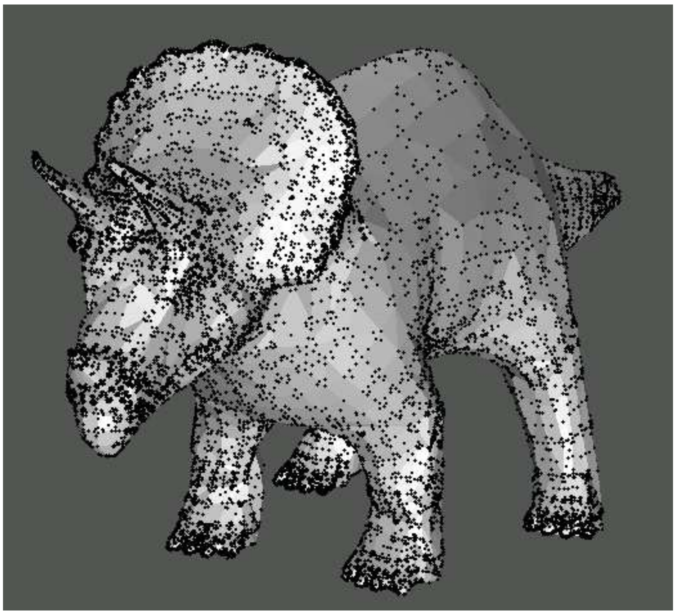


Figure 5.12: Triceratops.

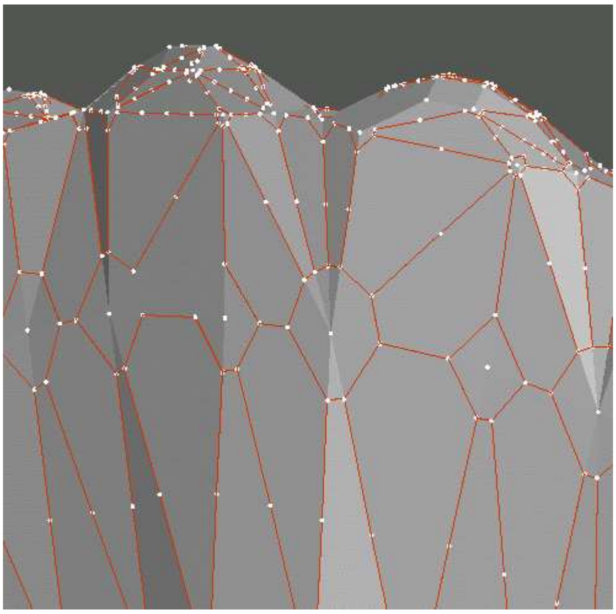


Figure 5.13: Detail of the triceratops. Solid line segments stand for shield edges.

Conclusion

Le fil conducteur de ce mémoire est l'étude d'opérations qui préservent et/ou mettent en évidence la topologie des objets géométriques, par leur décomposition, leur déformation ou leur raccourcissement. Ces travaux théoriques sont motivés par des questions qui surgissent dans certaines applications. Nous avons cherché à optimiser des courbes sur des surfaces : familles de cycles simples et deux à deux disjoints, ou plongements de graphes (en fixant les sommets). Nous nous sommes aussi intéressés au raccourcissement et à la déformation de plongements de graphes rectilignes dans le plan, cette fois en déplaçant les sommets. Enfin, nous avons donné un algorithme pour décomposer l'espace $\mathbf{R}^3$ en simplexes de Delaunay respectant des contraintes polyédrales. Nous résumons maintenant chacune de nos contributions, en essayant d'en tirer des enseignements, puis nous ébauchons des directions de recherche futures.

Résumé des contributions

Optimisation de courbes sur des surfaces

Nous avons d'abord considéré le problème de raccourcir un plongement de graphe ou de cycles sur une surface, en maintenant les propriétés topologiques de ces plongements. Nous avons introduit la notion de système de découpage, qui est un ensemble de courbes décomposant la surface en surfaces topologiquement élémentaires. Nous avons décrit des procédés itératifs relativement naturels pour raccourcir de tels systèmes de découpage. L'analyse de ces algorithmes, parfois assez délicate, s'est révélée très fructueuse. Les conséquences de cette analyse sont de plusieurs ordres :

– sur la *complexité* des algorithmes : ceux-ci convergent en un nombre fini d'étapes ; leur complexité est polynomiale en la complexité de la surface et du système d'entrée et en une caractéristique géométrique de la surface (rapport entre les poids extrêmes des arêtes) ;
– sur le *résultat* obtenu : après stabilisation, le système de découpage est optimal, c'est-à-dire aussi court que possible parmi les systèmes de découpage ayant les mêmes propriétés topologiques ;
– sur des *propriétés* des systèmes de découpage optimaux : chaque tel système de découpage est constitué de courbes qui sont, individuellement, aussi courtes que possible parmi les courbes ayant les mêmes propriétés topologiques ;

- de ces propriétés découlent de nouvelles *méthodes* pour optimiser un ensemble de courbes simples et disjointes sur une surface : il suffit de compléter cet ensemble en un système de découpage, d'optimiser ce système et de supprimer les courbes correspondant aux courbes introduites.

Ce travail a été amorcé suite à l'article [105], qui donne des algorithmes de calcul de schéma polygonal canonique. Les systèmes fondamentaux de lacets obtenus dans cet article, de taille *asymptotiquement* optimale, ne sont visuellement pas satisfaisants car plus longs que nécessaire, ce qui est préjudiciable pour les applications ; notre objectif initial était simplement de remédier à ce défaut. Nous avons ainsi développé un algorithme d'optimisation d'un système fondamental de lacets (très proche de l'algorithme d'optimisation d'un système de découpage par graphe, dans le cas où le graphe a un seul sommet). Même sans l'analyse du résultat de cet algorithme, il apparaissait clairement qu'il donnerait de bons résultats en pratique, suffisant pour les applications, et nous aurions pu en rester là. Mais l'analyse de cet algorithme a mis en évidence les conséquences que nous avons évoquées ci-dessus et a mené à des simplifications de cet algorithme (la complexité des algorithmes que nous avons présentés est meilleure que celle que nous avions donnée dans [40]) et à des extensions (raccourcissement de plongements de graphes et de cycles).

La méthode barycentrique de Tutte appliquée aux isotopies

Au chapitre 4, nous avons étudié un théorème classique de plongement de graphe, le théorème barycentrique de Tutte, de 1963 [152], et nous l'avons exploité pour étudier les isotopies de plongements de graphe, en vue d'applications comme la métamorphose. Il nous a semblé intéressant de donner une démonstration plus moderne de ce théorème, en admettant les résultats que Tutte démontrait simultanément et qui sont désormais bien connus (théorème de Kuratowski). Il s'est avéré plus tard qu'une démonstration utilisant certains arguments semblables aux nôtres avait été donnée en 1996 par Richter-Gebert [129, section 12.2]. Certaines différences subsistent entre les deux démonstrations et il serait intéressant de mener une comparaison soignée entre les deux.

Nous avons ensuite décrit une méthode, fondée sur le théorème de Tutte, pour créer une isotopie entre deux plongements d'un même graphe planaire triangulé. L'intérêt de l'utilisation du théorème de Tutte réside dans le fait que ce théorème a une interprétation physique simple : nous avons tenté de pousser cette interprétation physique aussi loin que possible dans la création des isotopies. Les résultats que nous obtenons montrent que nous ne pouvons créer une isotopie que sous certaines conditions assez restrictives sur les plongements de départ et d'arrivée.

Enfin, l'énoncé du théorème de Tutte admet une généralisation naturelle en dimension supérieure, et nous avons démontré que cet énoncé devenait faux en dimension 3. La méthode employée est assez complexe, puisque des contre-exemples nettement plus simples que le nôtre ont été trouvés postérieurement à notre travail, mais instructive sur le plan théorique. En effet, le fait que ce théorème ne se généralise pas en dimension trois est directement relié à un obstacle topologique connu qui apparaît quand on passe de la dimension deux à la dimension trois, mis évidence par Starbird [141], à savoir l'existence de certains complexes simpliciaux plongés dans $\mathbf{R}^3$ qui sont combinatoirement équivalents mais non isotopes, même si leurs bords sont les mêmes. Cela met encore en évidence le lien entre ce théorème de Tutte et les isotopies de complexes simpliciaux.

Triangulations de Delaunay conformes 3D

Dans le chapitre 5, nous avons donné un algorithme pour calculer un ensemble de points de $\mathbf{R}^3$ dont la triangulation de Delaunay se conforme à un ensemble de contraintes polyédrales données, problème issu de la génération de maillages et de la modélisation géométrique. L'apport principal de notre algorithme, par rapport aux approches précédentes, est que le nombre de points produits est raisonnable en pratique. La méthode employée consiste à « protéger » les sommets et les arêtes contraintes par des sphères, dont la dimension est adaptée à la géométrie locale des contraintes. Une question importante est de savoir si cet algorithme, tel quel ou légèrement modifié, est utilisable en pratique pour la création de maillages volumiques.

Perspectives

Les travaux que nous avons présentés peuvent être prolongés et améliorés dans plusieurs directions.

Maillages tétraédriques

Notre travail sur les triangulations de Delaunay conformes s'inscrit dans la thématique plus large de la création des *maillages tétraédriques*. Dans des domaines tels que le calcul scientifique, la simulation numérique, la modélisation géométrique et la visualisation, il est préalablement nécessaire de décomposer l'espace ou l'objet étudié en objets élémentaires, tétraèdres, triangles, arêtes et sommets. Les propriétés du maillage : nombre, forme et taille de ses simplexes, influent grandement sur la rapidité et l'efficacité d'un calcul numérique ou d'un traitement algorithmique. Les triangulations de Delaunay constituent un moyen privilégié pour créer des maillages, à cause de leurs propriétés bien étudiées et de la forme de leurs éléments. En dimension deux, les triangulations de Delaunay conformes d'une part, contraintes d'autre part, peuvent être utilisées dans ce but. En dimension trois, la triangulation de Delaunay contrainte d'un objet polyédral n'existe que sous certaines conditions (voir [139]). Il convient d'explorer ce domaine, afin d'allier éventuellement triangulations de Delaunay contraintes et conformes. Obtenir des garanties théoriques sur la qualité du maillage de sortie d'un algorithme constitue un problème difficile mais intéressant. La création de maillages anisotropes, et sur des objets courbes, sont des objectifs à plus long terme.

Plongements et isotopies de complexes 3D

Les prolongements possibles sur nos résultats à propos du théorème barycentrique de Tutte sont de plusieurs ordres. Tout d'abord, pour appliquer le théorème, il est nécessaire que les sommets fixes soient sur le bord d'un polygone convexe. Est-il possible de généraliser ce théorème au cas où d'autres sommets, situés à l'intérieur du polygone, ont aussi des positions fixes ? Ce problème nous semble intéressant du point de vue du paramétrage contraint. D'autre part, on peut vouloir réaliser une isotopie entre deux plongements de graphes en imposant qu'un sommet soit fixé tout au long de la déformation, ou encore suive une trajectoire donnée.

Mais les extensions potentielles de ce travail portent essentiellement sur le cas 3D. Nous avons démontré un résultat négatif, à savoir que la méthode barycentrique de Tutte ne fonctionne pas en dimension trois. Il reste donc à trouver des méthodes algorithmiques pour plonger un complexe simplicial volumique dans $\mathbf{R}^3$, si possible aussi naturelles et laissant autant de flexibilité que la méthode barycentrique de Tutte. Ce problème est sans nul doute difficile (l'existence des nœuds à partir de la dimension trois est un exemple des obstacles que l'on peut rencontrer en augmentant la dimension) mais assez fondamental (il ne fait que généraliser le problème du dessin de graphes en dimension supérieure).

Nous pourrions ensuite aborder le problème de calculer des isotopies entre deux tels plongements, en autorisant si nécessaire le raffinement du complexe simplicial : les questions d'existence d'une telle isotopie ont été discutées ([15, 143]) mais jamais vraiment abordées du point de vue algorithmique. La théorie des espaces de réalisations des polytopes de dimension 4 et le théorème d'universalité de Mnëv [130] sont liés à ces questions et permettent peut-être d'en tirer des conséquences. Tous ces problèmes sont d'un grand intérêt dans le domaine de la modélisation tridimensionnelle : le paramétrage 3D et les métamorphoses volumiques sont deux exemples d'applications possibles de ces questions théoriques.

Décompositions topologiques et raccourcissements

Notre travail sur le raccourcissement de courbes sur les surfaces peut être prolongé dans plusieurs directions, que nous avons présentées dans la conclusion du chapitre 3 ; nous invitons le lecteur à s'y référer. Nous donnons ici des pistes de recherche découlant moins directement de ce travail.

Les chapitres 3 et 4 concernent tous les deux des problèmes de raccourcissement de plongements de graphes :

– dans le chapitre 4, on cherche à déplacer des sommets d'un plongement de graphe rectiligne dans le plan, afin de minimiser la somme des carrés des longueurs des arêtes (dans le cas des poids égaux à un) ;
– dans le chapitre 3, on raccourcit les arêtes d'un plongement de graphe sur une surface, en maintenant les sommets fixés. On parvient aussi, en particulier, à minimiser la somme des carrés des longueurs des arêtes parmi une certaine classe de plongements.

Une idée tentante est de vouloir allier ces deux travaux, en travaillant sur des plongements de graphes sur une surface dont les sommets sont autorisés à se déplacer. On peut vouloir calculer le plongement de graphe (éventuellement dans une classe d'homotopie donnée) qui minimise la somme des carrés des longueurs des arêtes. D'autre part, comment créer une isotopie entre deux plongements de graphes isotopes sur une surface (sans passer par un plongement le plus court possible) ? Toutes les questions que nous nous posions dans le chapitre 4 dans un cadre planaire se posent aussi sur une surface.

On peut simplifier une triangulation d'une surface par contractions itératives d'arêtes, lorsque cette contraction ne modifie pas la topologie de la surface. Les triangulations d'une surface donnée qui n'admettent aucune contraction valide s'appellent les *triangulations minimales* d'une surface (voir [61, chapitre 4] et [8, 9, 120, 52]). Un objectif des travaux que nous venons de citer est de dénombrer les triangulations minimales d'une surface donnée et de les calculer. L'existence d'une décomposition en pantalons d'une surface donne une indication de sa structure et permet peut-être d'en déduire un moyen de borner et/ou générer ses triangulations minimales : peut-on définir la notion de triangulation minimale d'une surface à bord comme un pantalon et en quoi les triangulations minimales d'une surface peuvent-elles être obtenues à partir d'un recollement de triangulations minimales de pantalons ?

Un certain nombre de travaux [94, 65, 13] ont considéré le problème de raccourcir des courbes dans le plan à classe d'homotopie fixée. En ce sens, notre travail constitue une généralisation de ces travaux à des surfaces non nécessairement planes. Peut-on généraliser d'autres résultats connus dans le plan ? Un travail récent [66] s'intéresse au calcul de séparateurs d'un graphe plongé sur une surface non nécessairement planaire, en utilisant un schéma polygonal de la surface. La littérature sur les graphes planaires est abondante ; comment de tels résultats se généralisent-ils aux graphes plongés sur des surfaces ?

La plupart des surfaces manipulées en pratique sont plongées dans $\mathbf{R}^3$. Or, notre travail ne considère absolument pas ce plongement. Une piste de recherche est de déterminer des types de décompositions qui soient plus naturelles que d'autres vis-à-vis du plongement dans l'espace ambiant. Il paraît par exemple souhaitable de décomposer la surface suivant des courbes fermées qui entourent l'objet (volumique) ou son complémentaire (c'est-à-dire qui soient le bord d'un disque inclus dans l'objet ou son complémentaire). Comment créer une décomposition en pantalons ou en système fondamental de lacets satisfaisant cette contrainte ? Comment des outils tels que l'homologie en dimension trois ou le graphe des contours peuvent-ils être utilisés ? D'autres types de décompositions (par complexes de Morse par exemple) sont-ils plus adaptés ? Quelles sont les applications concernées par cette question (métamorphose entre objets volumiques, reconnaissance de maillages tridimensionnels, ...) ?

Un problème sans doute plus difficile est de s'intéresser à la décomposition, au raccourcissement et à la déformation d'objets géométriques en dimension supérieure. Comment raccourcir une surface dans l'espace $\mathbf{R}^3$ privé de certains obstacles, en conservant la classe d'homotopie de la surface ? Une série de questions en théorie algorithmique des nœuds se pose aussi : comment représenter un nœud sous une forme aussi canonique que possible [134], réaliser algorithmiquement le dénouage d'un nœud, ou encore déformer un nœud en un autre ?

Table des figures

Bibliographie

[1] P. K. Agarwal, B. Aronov, J. O'Rourke et C. A. Schevon. Star unfolding of a polytope with applications. *SIAM Journal on Computing*, 26(6) :1689–1713, 1997.

[2] P. Alliez, É. Colin de Verdière, O. Devillers et M. Isenburg. Isotropic surface remeshing. Dans *Proceedings of the International Conference on Shape Modelling and Applications (SMI'03)*, pages 49–58, 2003.

[3] P. Alliez et C. Gotsman. Recent advances in compression of 3D meshes. Dans *Proceedings of the Symposium on Multiresolution in Geometric Modeling*, 2003.

[4] P. Alliez, M. Meyer et M. Desbrun. Interactive geometry remeshing. *ACM Transactions on Graphics. Special issue for SIGGRAPH conference*, 21(3) :347–354, 2002.

[5] P. Angelier et M. Pocchiola. A sum of squares theorem for visibility complexes and applications. Dans B. Aronov, S. Basu, J. Pach et M. Sharir, éditeurs, *Discrete and Computational Geometry : The Goodman–Pollack Festschrift*, volume 25 de *Algorithms and Combinatorics*, pages 79–139. Springer-Verlag, 2003.

[6] M. A. Armstrong. *Basic topology.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1983.

[7] J.-M. Autebert. *Théorie des langages et des automates.* Masson, 1994.

[8] D. W. Barnette et A. L. Edelson. All orientable 2–manifolds have finitely many minimal triangulations. *Israel Journal of Mathematics*, 62 :90–98, 1988.

[9] D. W. Barnette et A. L. Edelson. All 2–manifolds have finitely many minimal triangulations. *Israel Journal of Mathematics*, 67 :123–128, 1989.

[10] B. Becker et G. Hotz. On the optimal layout of planar graphs with fixed boundary. *SIAM Journal on Computing*, 16(5) :946–972, 1987.

[11] M. Bern, D. Eppstein, P. K. Agarwal, N. Amenta, P. Chew, T. Dey, D. P. Dobkin, H. Edelsbrunner, C. Grimm, L. J. Guibas, J. Harer, J. Hass, A. Hicks, C. K. Johnson, G. Lerman, D. Letscher, P. Plassmann, E. Sedgwick, J. Snoeyink, J. Weeks, C. Yap et D. Zorin. Emerging challenges in computational topology. ACM Computing Research Repository, 1999. Rapport sur un séminaire de la NSF sur la topologie algorithmique.

[12] J. Berstel. *Transductions and context-free languages.* Teubner Studienbücher Informatik, 1979.

[13] S. Bespamyatnikh. Computing homotopic shortest paths in the plane. Dans *Proceedings of the 14th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'03)*, pages 609–617, 2003.

[14] R. H. Bing. *The geometric topology of 3-manifolds.* American Mathematical Society, 1983.

[15] R. H. Bing et M. Starbird. Linear isotopies in E^2. *Transactions of the American Mathematical Society*, 237 :205–222, 1978.

[16] G. D. Birkhoff. Dynamical systems with two degrees of freedom. *Transactions of the American Mathematical Society*, 18 :199–300, 1917.

[17] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White et G. Ziegler. *Oriented matroids.* Cambridge University Press, 1993.

[18] E. D. Bloch, R. Connelly et D. W. Henderson. The space of simplexwise linear homeomorphisms of a convex 2-disk. *Topology*, 23(2) :161–175, 1984.

[19] J.-D. Boissonnat et M. Yvinec. *Géométrie algorithmique.* Ediscience international, 1995. Paru en anglais sous le titre *Algorithmic Geometry*, Cambridge University Press, 1998. Traduction d'Hervé Brönimann.

[20] B. Bollobás. *Modern graph theory*, volume 184 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, 1998.

[21] T. Brahana. Systems of circuits on 2-dimensional manifolds. *Annals of Mathematics*, 23 :144–168, 1921.

[22] G. R. Brightwell et E. R. Scheinerman. Representations of planar graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 6(2) :214–229, 1993.

[23] R. A. Brualdi et H. J. Ryser. *Combinatorial matrix theory*, volume 39 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, 1991.

[24] P. Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, volume 106 de *Progress in Mathematics.* Birhäuser Verlag, 1992.

[25] S. Cabello, Y. Liu, A. Mantler et J. Snoeyink. Testing homotopy for paths in the plane. Dans *Proceedings of the 18th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SOCG'02)*, pages 160–169, 2002.

[26] S. S. Cairns. Deformations of plane rectilinear complexes. *American Mathematical Monthly*, 51 :247–252, 1944.

[27] J. Canny et J. Reif. New lower bound techniques for robot motion planning problems. Dans *Proceedings of the 34th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'87)*, pages 400–409, 1987.

[28] D. E. Cardoze. An optimal algorithm for the minimum edge cardinality cut surface problem. Dans *Proceedings of the 19th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SOCG'03)*, pages 338–343, 2003.

[29] S. Chaiken. A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 3 :319–329, 1982.

[30] B. Chazelle. Triangulating a simple polygon in linear time. *Discrete and Computational Geometry*, 6 :485–524, 1991.

[31] J. Chen et Y. Han. Shortest paths on a polyhedron. Dans *Proceedings of the 6th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SOCG'90)*, pages 360–369, 1990.

[32] L. P. Chew. Guaranteed-quality triangular meshes. Technical Report TR-89-983, Department of Computer Science, Cornell University, Ithaca, NY, avril 1989.

[33] D. R. J. Chillingworth. Simple closed curves on surfaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 1 :310–314, 1969.

[34] D. R. J. Chillingworth. An algorithm for families of disjoint simple closed curves on surfaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 3 :23–26, 1971.

[35] M. Chrobak, M. T. Goodrich et R. Tamassia. Convex drawings of graphs in two and three dimensions. Dans *Proceedings of the 12th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SOCG'96)*, pages 319–328, 1996.

[36] M. Chrobak et G. Kant. Convex grid drawings of 3-connected planar graphs. *International Journal on Computional Geometry and Applications*, 7(3) :211–223, 1997.

[37] M. Cohen et M. Lustig. Paths of geodesics and geometric intersection numbers. I. Dans *Combinatorial group theory and topology (Alta, Utah, 1984)*, volume 111 de *Annals of Mathematical Studies*, pages 479–500. Princeton University Press, 1987.

[38] D. Cohen-Steiner, É. Colin de Verdière et M. Yvinec. Conforming Delaunay triangulations in 3D. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 2004(?). À paraître. Une version préliminaire est parue dans *Proceedings of the 18th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SOCG'02)*.

[39] É. Colin de Verdière. Isotopies de graphes planaires avec applications à la métamorphose. D.E.A., École normale supérieure (Paris), 2000. `http://www.di.ens.fr/~colin/textes/dea.ps.gz`.

[40] É. Colin de Verdière et F. Lazarus. Optimal system of loops on an orientable surface. Dans *Proceedings of the 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'02)*, pages 627–636, 2002. Une version préliminaire est parue dans *Proceedings of the 18th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG'02)*.

[41] É. Colin de Verdière et F. Lazarus. Optimal pants decompositions and shortest homotopic cycles on an orientable surface. Dans *Proceedings of the 11th Symposium on Graph Drawing (GD'03)*, 2003. À paraître. Une version préliminaire est parue dans *Abstracts of the 19th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG'03)*.

[42] É. Colin de Verdière, M. Pocchiola et G. Vegter. Tutte's barycenter method applied to isotopies. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 26(1) :81–97, août 2003. Une version préliminaire est parue dans *Proceedings of the 13th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG'01)*.

[43] Y. Colin de Verdière. Comment rendre géodésique une triangulation d'une surface ? *L'Enseignement Mathématique*, 37 :201–212, 1991.

[44] T. Cormen, C. Leiserson et R. Rivest. *Introduction to algorithms.* MIT Press, 1990.

[45] R. Courant et H. Robbins. *What is mathematics ?* Oxford University Press, 1979. An elementary approach to ideas and methods.

[46] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars et O. Schwarzkopf. *Computational Geometry : Algorithms and Applications.* Springer-Verlag, 1997.

[47] M. de Berg, M. van Kreveld et S. Schirra. Topologically correct subdivision simplification using the bandwidth criterion. *Cartography and GIS*, 25 :243–257, 1998.

[48] M. de Graaf et A. Schrijver. Making curves minimally crossing by Reidemeister moves. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 70(1) :134–156, 1997.

[49] M. Dehn. Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen. *Mathematische Annalen*, 72 :413–421, 1912.

[50] M. Desbrun, M. Meyer et P. Alliez. Intrinsic parameterizations of surface meshes. Dans *Eurographics conference proceedings*, pages 209–218, 2002.

[51] T. K. Dey, H. Edelsbrunner et S. Guha. Computational topology. Dans B. Chazelle, J. E. Goodman et R. Pollack, éditeurs, *Advances in Discrete and Computational Geometry - Proc. 1996 AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conf. Discrete and Computational Geometry : Ten Years Later*, numéro 223 dans Contemporary Mathematics, pages 109–143. American Mathematical Society, 1999.

[52] T. K. Dey, H. Edelsbrunner, S. Guha et D. V. Nekhayev. Topology preserving edge contraction. *Publications de l'Institut Mathématique (Beograd)*, 60(80) :23–45, 1999. Geometric combinatorics (Kotor, 1998).

[53] T. K. Dey et S. Guha. Transforming curves on surfaces. *Journal of Computer and System Sciences*, 58 :297–325, 1999.

[54] T. K. Dey et H. Schipper. A new technique to compute polygonal schema for 2-manifolds with application to null-homotopy detection. *Discrete and Computational Geometry*, 14(1) :93–110, 1995.

[55] G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia et I. G. Tollis. *Graph drawing.* Prentice Hall, 1999.

[56] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik 1*, pages 269–271, 1959.

[57] P. H. Doyle et D. A. Moran. A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated. *Inventiones Mathematicae*, 5 :160–162, 1968.

[58] P. Eades et P. Garvan. Drawing stressed planar graphs in three dimensions. Dans *Proceedings of the 3rd International Conference on Graph Drawing (GD'95)*, volume 1027 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 212–223. Springer-Verlag, 1996.

[59] M. Eck, T. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery et W. Stuetzle. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. *Computer Graphics*, 29(Annual Conference Series) :173–182, 1995.

[60] H. Edelsbrunner. *Algorithms in combinatorial geometry*, volume 10 de *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer-Verlag, 1987.

[61] H Edelsbrunner. *Geometry and topology for mesh generation*. Cambridge University Press, 2001.

[62] H. Edelsbrunner, J. Harer, V. Natarajan et V. Pascucci. Morse-Smale complexes for piecewise linear 3-manifolds. Dans *Proceedings of the 19th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SOCG'03)*, pages 361–370, 2003.

[63] H. Edelsbrunner, J. Harer et A. Zomorodian. Hierarchical Morse-Smale complexes for piecewise linear 2-manifolds. *Discrete and Computational Geometry*, 30 :87–107, 2003.

[64] H. Edelsbrunner et T. S. Tan. An upper bound for conforming Delaunay triangulations. *Discrete and Computational Geometry*, 10(2) :197–213, 1993.

[65] A. Efrat, S. G. Kobourov et A. Lubiw. Computing homotopic shortest paths efficiently. Dans *Proceedings of the 10th Annual European Symposium on Algorithms (ESA'02)*, pages 411–423, 2002.

[66] D. Eppstein. Dynamic generators of topologically embedded graphs. Dans *Proceedings of the 14th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'03)*, pages 599–608, 2003.

[67] D. B. A. Epstein. Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta Mathematica*, 115 :83–107, 1966.

[68] J. Erickson et S. Har-Peled. Optimally cutting a surface into a disk. Dans *Proceedings of the 18th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SOCG'02)*, pages 244–253, 2002.

[69] I. Fáry. On straight line representations of planar graphs. *Acta scientiarum mathematicarum(Szeged)*, 11 :229–233, 1948.

[70] S. Felsner. Convex drawings of planar graphs and the order dimension of 3-polytopes. *Order*, 18(1) :19–37, 2001.

[71] C. D. Feustel. Homotopic arcs are isotopic. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17 :891–896, 1966.

[72] M. Floater. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 14(3) :231–250, 1997.

[73] M. S. Floater et C. Gotsman. How to morph tilings injectively. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 101 :117–129, 1999.

[74] A. T. Fomenko et T. L. Kunii. *Topological modeling for visualization.* Springer-Verlag, 1997.

[75] M. Freedman, J. Hass et P. Scott. Closed geodesics on surfaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 14 :385–391, 1982.

[76] P. J. Frey et P.-L. George. *Maillages. Applications aux éléments finis.* Hermès Science Publications, 1999.

[77] C. Friedrich et P. Eades. The Marey graph animation tool demo. Dans *Proceedings of the 8th International Symposium on Graph Drawing (GD'00)*, volume 1984 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 396–406, 2001.

[78] M. E. Gage. Curve shortening on surfaces. *Annales Scientifiques de l'École normale supérieure, Quatrième série*, 23(2) :229–256, 1990.

[79] M. Garland, A. Willmott et P.S. Heckbert. Hierarchical face clustering on polygonal surfaces. Dans *Proceedings of the ACM Symposium on Interactive 3D Graphics*, pages 49–58, 2001.

[80] J. E. Goodman. Pseudoline arrangements. Dans Jacob E. Goodman et Joseph O'Rourke, éditeurs, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 5, pages 83–110. CRC Press, 1997.

[81] C. Gotsman et V. Surazhsky. Guaranteed intersection-free polygon morphing. *Computers and Graphics*, 25(1) :67–75, 2001.

[82] M. A. Grayson. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *Journal of Differential Geometry*, 26(2) :285–314, 1987.

[83] M. A. Grayson. Shortening embedded curves. *Annals of Mathematics. Second Series*, 129(1) :71–111, 1989.

[84] M. D. Greendlinger. On Dehn's algorithm for the conjugacy and word problems with applications. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13 :641–677, 1960.

[85] P. M. Gruber et J. M. Wills, éditeurs. *Handbook of convex geometry.* North-Holland, 1993.

[86] X. Gu, S. Gortler et H. Hoppe. Geometry images. *ACM Transactions on Graphics. Special issue for SIGGRAPH conference*, 21(3) :355–361, 2002.

[87] D. Halperin, L. Kavraki et J.-C. Latombe. Robotics. Dans Jacob E. Goodman et Joseph O'Rourke, éditeurs, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 41, pages 755–778. CRC Press, 1997.

[88] J. Hass et P. Scott. Intersections of curves on surfaces. *Israel Journal of Mathematics*, 51(1–2) :90–120, 1985.

[89] J. Hass et P. Scott. Shortening curves on surfaces. *Topology*, 33(1) :25–43, 1994.

[90] A. Hatcher. Pants decompositions of surfaces. `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/Papers/pantsdecomp.pdf`, 2000.

[91] A. Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, 2002. Disponible sur `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/`.

[92] M. Henle. *A combinatorial introduction to topology.* Dover Publications, 1994.

[93] M. Henzinger, P. Klein, S. Rao et S. Subramanian. Faster shortest-path algorithms for planar graphs. *Journal of Computer and System Sciences*, 55(1, part 1) :3–23, 1997.

[94] J. Hershberger et J. Snoeyink. Computing minimum length paths of a given homotopy class. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 4 :63–98, 1994.

[95] J. Hershberger et S. Suri. An optimal algorithm for Euclidean shortest paths in the plane. *SIAM Journal on Computing*, 28(6) :2215–2256, 1999.

[96] J. E. Hopcroft et P. J. Kahn. A paradigm for robust geometric algorithms. *Algorithmica*, 7(4) :339–380, 1992.

[97] J. E. Hopcroft et J. D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation.* Addison-Wesley, 1979.

[98] I. M. James, éditeur. *History of topology.* North-Holland, 1999.

[99] T. Kanai et H. Suzuki. Approximate shortest path on a polyhedral surface based on selective refinement of the discrete graph and its applications. Dans *Geometric Modeling and Processing*, pages 241–250. IEEE Computer Society Press, 2000.

[100] T. Kanai, H. Suzuki et F. Kimura. Metamorphosis of arbitrary triangular meshes. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 20(2) :62–75, 2000.

[101] R. Kimmel, N. Kiryati et A. M. Bruckstein. Multi-valued distance maps in finding shortest paths between moving obstacles. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 14(3) :427–436, 1998.

[102] W. Klingenberg. *Lectures on closed geodesics.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1978.

[103] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fundamenta mathematicae*, 15 :271–283, 1930.

[104] M. Lanthier, A. Maheshwari et J.-R. Sack. Approximating shortest paths on weighted polyhedral surfaces. *Algorithmica*, 30(4) :527–562, 2001.

[105] F. Lazarus, M. Pocchiola, G. Vegter et A. Verroust. Computing a canonical polygonal schema of an orientable triangulated surface. Dans *Proceedings of the 17th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SOCG'01)*, pages 80–89, 2001.

[106] F. Lazarus et A. Verroust. 3D metamorphosis : a survey. *The Visual Computer*, 8(3) :131–146, 1998.

[107] D. T. Lee et F. P. Preparata. Euclidean shortest paths in the presence of rectilinear barriers. *Networks*, 14(3) :393–410, 1984.

[108] C. E. Leiserson et F. M. Maley. Algorithms for routing and testing routability of planar VLSI layouts. Dans *Proceedings of the 17th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'85)*, pages 69–78, 1985.

[109] B. Lévy et J.-L. Mallet. Non-distorted texture mapping for sheared triangulated meshes. Dans *SIGGRAPH 1998*, pages 343–352, 1998.

[110] N. Linial, L. Lovász et A. Wigderson. Rubber bands, convex embeddings and graph connectivity. *Combinatorica*, 8(1) :91–102, 1988.

[111] L. Lusternik et L. Schnirelmann. Sur le problème de trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre 0. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 189 :269–271, 1929.

[112] M. Lustig. Paths of geodesics and geometric intersection numbers. II. Dans *Combinatorial group theory and topology (Alta, Utah, 1984)*, volume 111 de *Annals of Mathematical Studies*, pages 501–543. Princeton University Press, 1987.

[113] J. Maillot, H. Yahia et A. Verroust. Interactive texture mapping. Dans *SIGGRAPH 1993*, pages 27–34, 1993.

[114] W. S. Massey. *Algebraic Topology : An Introduction*, volume 56 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1977.

[115] J. S. B. Mitchell. Geometric shortest paths and network optimization. Dans Jörg-Rüdiger Sack et Jorge Urrutia, éditeurs, *Handbook of computational geometry*, pages 633–701. Elsevier, 2000.

[116] J. S. B. Mitchell, D. M. Mount et C. H. Papadimitriou. The discrete geodesic problem. *SIAM Journal on Computing*, 16(4) :647–668, 1987.

[117] B. Mohar et C. Thomassen. *Graphs on surfaces*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. John Hopkins University Press, 2001.

[118] D. M. Mount. The number of shortest paths on the surface of a polyhedron. *SIAM Journal on Computing*, 19 :593–611, 1990.

[119] M. Murphy, D. M. Mount et C. W. Gable. A point-placement strategy for conforming Delaunay tetrahedralization. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 11(6) :669–682, 2001.

[120] A. Nakamoto et K. Ota. Note on irreducible triangulations of surfaces. *Journal of Graph Theory*, 20(2) :227–233, 1995.

[121] M. Neumann-Coto. A characterization of shortest geodesics on surfaces. *Algebraic and Geometic Topology*, 1 :349–368, 2001.

[122] C. Ó Dúnlaing. Flat-face embeddings of certain 2-complexes. Dans *Abstracts of the 18th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG'02)*, pages 75–79, 2002.

[123] J. Orlin. Line-digraphs, arborescences, and theorems of Tutte and Knuth. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 25(2) :187–198, 1978.

[124] E. Papadopoulou. k-pairs non-crossing shortest paths on a simple polygon. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 9(6) :533–552, 1999.

[125] G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric application. `http://www.arxiv.org/abs/math.DG/0211159`, novembre 2002.

[126] G. Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. `http://www.arxiv.org/abs/math.DG/0303109`, mars 2003.

[127] D. Piponi et G. Borshukov. Seamless texture mapping of subdivision surfaces by model pelting and texture blending. Dans *SIGGRAPH 2000*, pages 471–478, 2000.

[128] D. Poulalhon et G. Schaeffer. Optimal coding and sampling of triangulations. Dans *Proceedings of the 30th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP'03)*, pages 1080–1094, 2003.

[129] J. Richter-Gebert. *Realization spaces of polytopes*, volume 1643 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1996.

[130] J. Richter-Gebert. The universality theorems for oriented matroids and polytopes. Dans B. Chazelle, J. E. Goodman et R. Pollack, éditeurs, *Advances in Discrete and Computational Geometry — Proceedings of the 1996 AMS-IMS-SIAM Join Summer Research Confererence Discrete and Computational Geometry : Ten Years Later*, Contemporary Mathematics, pages 269–292, 1999.

[131] G. D. Rose. No assembly required. *The Sciences*, 36 :26–31, 1996.

[132] J. Ruppert. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. *Journal of Algorithms*, 18 :548–585, 1995.

[133] A. Saalfeld. Delaunay edge refinements. Dans *Proceedings of the 3rd Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG'91)*, pages 33–36, 1991.

[134] R. G. Scharein. *Interactive topological drawing.* PhD thesis, Department of Computer Science, The University of British Columbia, 1998.

[135] H. Schipper. Determining contractibility of curves. Dans *Proceedings of the 8th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SOCG'92)*, pages 358–367, 1992.

[136] O. Schramm. How to cage an egg. *Inventiones mathematicae*, 107 :543–560, 1992.

[137] A. Schrijver. *Combinatorial optimization. Polyhedra and efficiency*, volume 24 de *Algorithms and Combinatorics*. Springer-Verlag, 2003.

[138] J. A. Sethian. *Level set methods and fast marching methods.* Cambridge University Press, 1999.

[139] J. R. Shewchuk. A condition guaranteeing the existence of higher-dimensional constrained Delaunay triangulations. Dans *Proceedings of the 14th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SOCG'98)*, pages 76–85, 1998.

[140] J. R. Shewchuk. Tetrahedral mesh generation by Delaunay refinement. Dans *Proceedings of the 14th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SOCG'98)*, pages 86–95, juin 1998.

[141] M. Starbird. A complex which cannot be pushed around in E^3. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 63(2) :363–368, 1977.

[142] M. Starbird. Linear isotopies in E^3. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 65(2) :342–346, 1977.

[143] M. Starbird. The Alexander linear isotopy theorem in E^3. Dans *Continua, decompositions, manifolds*, pages 243–267. University of Texas Press, Austin, 1983.

[144] S. K. Stein. Convex maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2 :464–466, 1951.

[145] J. Stillwell. *Classical topology and combinatorial group theory.* Springer-Verlag, 1980.

[146] C. Thomassen. Kuratowski's theorem. *Journal of Graph Theory*, 5(3) :225–241, 1981.

[147] C. Thomassen. Deformations of plane graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 34 :244–257, 1983.

[148] C. Thomassen. The Jordan–Schönflies theorem and the classification of surfaces. *The American Mathematical Monthly*, 99(2) :116–130, 1992.

[149] W. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology, volume 1.* Princeton University Press, 1997.

[150] J. R. Tristano, S. J. Owen et S. A. Canann. Advancing front surface mesh generation in parametric space using a Riemannian surface definition. Dans *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pages 429–445, 1998.

[151] W. T. Tutte. Convex representations of graphs. *Proceedings London Mathematical Society*, 10 :304–320, 1960.

[152] W. T. Tutte. How to draw a graph. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 13 :743–768, 1963.

[153] G. Vegter. Computational topology. Dans Jacob E. Goodman et Joseph O'Rourke, éditeurs, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 28, pages 517–536. CRC Press, 1997.

[154] G. Vegter et C. K. Yap. Computational complexity of combinatorial surfaces. Dans *Proceedings of the 6th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SOCG'90)*, pages 102–111, 1990.

[155] K. Wagner. Bemerkungen zum Vierfarbenproblem. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 46 :26–32, 1936.

[156] W. Whiteley. Motions and stresses of projected polyhedra. *Structural Topology*, 7 :13–38, 1982.

[157] D. Zeilberger. A combinatorial approach to matrix algebra. *Discrete Mathematics*, 56(1) :61–72, 1985.

[158] G. M. Ziegler. *Lectures on polytopes*, volume 152 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1994.

[159] Živaljević. Topological methods. Dans Jacob E. Goodman et Joseph O'Rourke, éditeurs, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 11, pages 209–224. CRC Press, 1997.

Index

Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude algorithmique de trois opérations sur les objets géométriques : leur décomposition, leur déformation et leur raccourcissement.

Le thème principal est le raccourcissement de courbes sur une surface et la décomposition d'une surface en surfaces topologiquement élémentaires. Considérons des courbes tracées sur une surface, sans intersections ni auto-intersections. Nous souhaitons les raccourcir autant que possible tout en préservant leur topologie, c'est-à-dire en les déformant continûment sans introduire d'intersections. Ceci est en particulier utile en modélisation géométrique et en infographie, où trouver des décompositions topologiques courtes est nécessaire.
Nous présentons des résultats classiques de topologie des surfaces et un survol des travaux antérieurs de topologie algorithmique des surfaces ayant un lien avec ce problème. Nous donnons ensuite des algorithmes pour le résoudre, pour des plongements de graphes à sommets fixés et des ensembles de cycles sans intersections, dans un cadre où les courbes sont tracées sur le graphe sommets-arêtes d'une surface polyédrale. Ces algorithmes sont polynomiaux en leur entrée et en le rapport des poids extrêmes des arêtes du graphe sommets-arêtes. Nous montrons des résultats d'optimalité de chacune des courbes résultantes.

Un autre travail, motivé par la création de métamorphoses (morphings) entre objets, concerne la déformation de triangulations dans le plan. Nous redémontrons et utilisons le théorème de plongement barycentrique de Tutte pour construire de telles déformations, et nous montrons que son analogue en dimension trois est faux.

Une triangulation de Delaunay conforme est une triangulation de Delaunay de l'espace qui épouse la forme d'un objet polyédral donné. Ce concept est utilisé en génération de maillages. Nous donnons un algorithme qui calcule une telle triangulation en dimension trois, avec un nombre de sommets assez faible, en s'adaptant à la géométrie locale de l'objet.

Mots-clés : topologie algorithmique, homotopie, plus court chemin, décomposition topologique, plongement, graphe, paramétrage, triangulation de Delaunay.

Abstract

This dissertation is concerned with the algorithmic study of three operations on geometric objects: their decomposition, their deformation, and their shortening.

The main theme is the shortening of curves on a surface and the decomposition of a surface into topologically elementary surfaces. Let us consider a set of curves drawn on a surface, without intersections or self-intersections. We wish to shorten them as much as possible while preserving their topology, that is, by deforming them continuously without introducing intersections beween them. This is in particular useful in geometric modeling and computer graphics, where finding short topological decompositions is necessary.
We present classical results of topology of surfaces and an overview of the previous works in computational topology of surfaces which are related to this problem. We then provide algorithms to solve it, for embeddings of graphs with fixed vertices and sets of cycles without intersections, in a setting where the curves are drawn on the vertex-edge graph of a polyhedral surface. These algorithms are polynomial in their input and in the ratio between the extreme weights of the edges of the vertex-edge graph. We prove optimality results of each of the resulting curves.

Another work, motivated by the creation of metamorphoses (morphings) between objects, deals with the deformation of triangulations in the plane. We reprove and use Tutte's barycentric embedding theorem to build such deformations, and we prove that its analogue in dimension three does not hold.

A conforming Delaunay triangulation is a Delaunay triangulation of the space which fits the shape of a given polyhedral object. This concept is used in mesh generation. We give an algorithm which computes such a triangulation in dimension three, with a relatively small number of vertices, due to the fact that it adapts to the local geometry of the object.

Keywords: computational topology, homotopy, shortest path, topological decomposition, embedding, graph, parameterization, Delaunay triangulation.

Discipline : Informatique.
Adresse : École normale supérieure, Département d'informatique, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05.